小学奥数教程（五年级）

刘利新　主编

李禅平　高翠翠　参编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是作为小学五年级学生课余时间学习奥林匹克数学的教材编写的。作者均为多年从事奥林匹克数学教学的一线教师。全书按照五年级学生上、下两学期的内容编写，可供五年级两学期使用。每学期内容分为 14 个单元和 1 个综合练习，每周 3 课时，15 周至 18 周可进行完。题目的选择有一定梯度，可供不同程度学生选择使用。

本书有配套光盘，可供学生及相关教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

小学奥数教程. 五年级 / 刘利新主编. —北京：电子工业出版社，2010.3
ISBN 978-7-121-10440-4

I. 小…　II. 刘…　III. 数学课－小学－教学参考资料　IV.G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 030807 号

策划编辑：蔡　葵
责任编辑：沈桂晴
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编：100036
开　　本：900×1280　1/32　印张：7.5　字数：230 千字
印　　次：2010 年 3 月第 1 次印刷
印　　数：4000 册　定价：23.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前 言

随着知识经济时代的到来，人类社会信息化、全球化程度越来越高，我们的未来一代怎样才能够应对这种新的局面呢？学会学习，学会创新，全面提高自身素质将成为主旋律。

数学教育家米山国藏说：“学生们在初中或高中所学到的数学知识，在进入社会后，几乎没有什么机会应用，因而这种作为知识的数学，通常在出校门后不到一年就忘记了，然而不管他们从事什么业务工作，那种铭刻于头脑中的数学精神和数学方法，却长期在他们的生活和工作中发挥着重要作用。”

可见，数学教育的意义不在于或主要不在于培养数学家，而在于培养人的数学观念和数学思想，通过开拓头脑中的数学潜能，促进人的全面素质的提高。

奥林匹克数学，不同于以传授知识为主的教学方式，以开放性、创造性的思维模式，吸引了众多爱好数学的孩子们。同时，数学奥林匹克又是传统数学教学有益的补充，可以起到激发兴趣、开拓思路、提高能力、扩展知识等多种作用。

另外，通过网络开展网上教学也是信息化时代发展的必然趋势。如何使课堂教学与网络教学相结合，利用网络技术增加教学的趣味性，做到真正的寓教于乐，也是需要探索的新课题。

为此目的，作者的个人主页 www.liulixin.org 提供了数学题库，题目配有文字解答和视频讲解，可供学生及相关教师在线学习。

不同于基础知识教学的方面是，本教材更注重题目的分析处

理，而非理论讲解。题目本身是载体，通过对题目的分析去学习一种思考方法。因此，对题目的选取，我们经过多年实践经验的检验，本着学生好接受、能理解的原则，进行了认真处理，合理搭配。

本书有配套光盘，可供学生及相关教师使用。配套光盘对部分例题和习题进行了视频讲解，很多视频讲解是我们的课堂实录，可以使学生有置身课堂的现场感，通过教师与学生的互动，达到寓教于乐的目的，使学生更容易理解。

书中凡题后标注“视频”者，都配有视频，可在相应视频文件中找到，供同学们学习参考。

编　者

2010 年 2 月

目 录

第 1 讲　平　均　数

知识要点

几个不相等的数，在总和不变的条件下，通过移多补少，使这几个数完全相等，所求得的相等的数，就叫平均数.

求平均数公式

平均数=总量÷总份数

利用平均数求总量

总量=平均数×总份数

经典题再现

有两组数，第一组 9 个数的和是 63，第二组的平均数是 11，两组数中所有数的平均数是 8，第二组有几个数？（**视频**）

解：第一组数的平均数是 $63 \div 9=7$，

第二组数的平均数是 11，

所有数的平均数是 8，则第二组数每个数拿出 $11-8=3$，分给第一组的 9 个数，每个数分 1，拿出 3 个 3 就够了.

答：第二组有 3 个数.

典型例题

【例 1】 小明参加了 4 次语文测验，平均成绩是 68 分. 他想在下次语文测验后，把 5 次的平均成绩提高到 70 分以上. 那么，在下次测验中，他至少要得多少分？（**视频**）

解：前四次的总分$=68\times4=272$（分）.

如果 5 次平均分在 70 分以上，即平均分大于 70 分，则 5 次的总分应大于 $70\times5=350$（分）.

所以，第五次的成绩应大于 350−272=78（分）.

答：在第五次测验中，他至少要得 78 分.

【例 2】 5 位裁判员给一名体操运动员评分后，去掉一个最高分和一个最低分，平均得 9.58 分；只去掉一个最高分，平均得 9.46 分；只去掉一个最低分，平均得 9.66 分. 问这个运动员的最高分与最低分相差多少分？

解：只去掉一个最高分，从小到大前 4 个分数之和为 $9.46\times4=37.84$（分）.

只去掉一个最低分，从小到大后 4 个分数之和为 $9.66\times4=38.64$（分）.

它们都包含中间 3 个分数，相减后，即是最高分与最低分的差.

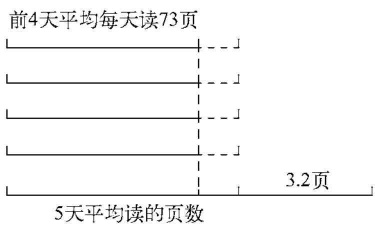
即 $38.64-37.84=0.8$（分）.

答：最高分与最低分相差 0.8 分.

【例 3】 暑假中，小华读了一本故事书. 第一天读了 83 页，第二天读了 74 页，第三天读了 71 页，第四天读了 64 页，第五天读的页数比 5 天中平均每天读的页数还多 3.2 页，问小华第五天读了多少页？**（视频）**

解：前 4 天平均每天读的页数为 $(83+74+71+64)\div4=73$（页）.

如下图所示.



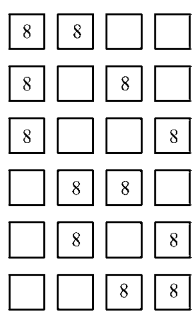
将 3.2 页平分成 4 份，分给前 4 天各 $3.2\div4=0.8$（页）.

5 天平均每天读的页数为 $73+0.8=73.8$（页）.

第 5 天读的页数为 $73.8+3.2=77$（页）.

答：小华第 5 天读了 77 页.

【例 4】 用 1,8,8,4 四张数字卡片可以组成若干个不同的四位数，所有这些四位数的平均值是多少？**（视频）**



解：先将两个 8 摆放到位. 如右图所示. 共有 6 种摆法.

剩余数位填 1 和 4，每种可以填出两个数. 共有 $6\times2=12$（个）数.

在这 12 个数中，个位上 8 出现 6 次，1 出现 3 次，4 出现 3 次.

同理，在十位、百位、千位上 8, 1, 4 出现的次数为 6, 3, 3 次.

个位、十位、百位、千位数字相加都是 $8\times6+1\times3+4\times3=63$.

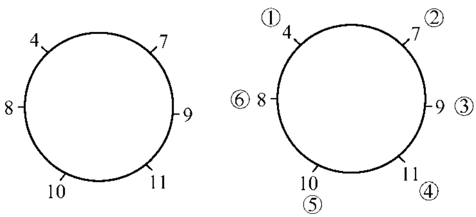
总和为 $63\times1000+63\times100+63\times10+63=69993$.

平均数为 $69993\div12=5832.75$.

答：所有这些四位数的平均值是 5832.75.

【例 5】 6 个人围成一圈，每人心里想一个数，并把这个数告诉左右相邻的两个人。然后每个人把左右相邻的人告诉自己的数的平均数亮出来。问亮出来数 11 的人原来心中想的数是多少？（**视频**）

解：从亮 4 的人开始编号，顺时针依次为①,②,③,④,⑤,⑥,如下图所示.



可列算式：②+⑥=8，②+④=18，④+⑥=20.

后面两个式子相加得②+⑥+④×2=38，

再减去第一个式子得

④×2=30，④=15.

答：亮出来数 11 的人原来心中想的数是 15.

【例 6】 一次象棋比赛共有 10 名选手参加，他们分别来自甲、乙、丙 3 个队. 每个人都与其余 9 名选手各赛一盘，每盘棋的胜者得 1 分，负者得 0 分，平局各得 0.5 分. 结果，甲队选手平均得 4.5 分，乙队选手平均得 3.6 分，丙队选手平均得 9 分. 那么，甲、乙、丙 3 队参赛选手的人数各是多少人？（**视频**）

解：共比赛 $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$（场），每场不管什么情况均有 1 分，故总分为 $45\times1=45$（分）.

全体求平均分，每人平均得 $45\div10=4.5$（分）.

已知甲、乙、丙 3 队各队的平均分为 4.5 分、3.6 分、9 分，

甲队的平均分与赛场平均分相同，将乙、丙两队也调整成赛场平均分.

丙队 1 人可贡献 $9-4.5=4.5$（分）；

乙队 1 人需要 4.5－3.6＝0.9（分）.

丙队 1 人的贡献可以满足 4.5 ÷ 0.9＝5（分）.

丙队不能有 2 人，否则乙队就有 10 人与题意不符.

所以，丙队 1 人，乙队 5 人.

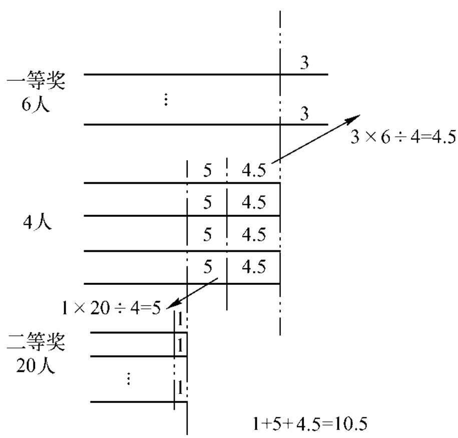
甲队 10－1－5＝4（人）.

答：甲、乙、丙 3 队分别有队员 4,5,1 人.

难题精讲

某次数学竞赛原定一等奖 10 人，二等奖 20 人，现将一等奖中最后 4 人调整为二等奖，这样得二等奖的学生的平均分提高了 1 分，得一等奖的学生的平均分提高了 3 分. 那么，原来一等奖平均分比二等奖平均分多多少分？（视频）

解：如下图所示：



6 个一等奖每人提高 3 分，共需 3×6=18（分）.

这 18 分由 4 个人分担，每人出 18 ÷ 4=4.5（分）.

二等奖每人提高 1 分，共需 1×20=20（分）.

这 20 分由 4 人分担，每人出 20÷4=5（分）.

这样，被降为二等奖的 4 个人每人要出 4.5+5=9.5（分）.

则原来一等奖比二等奖多 1+9.5=10.5（分）.

答：原来一等奖平均分比二等奖平均分多 10.5 分.

同步练习

1. 学校足球队 18 人合影留念，照六英寸照片，洗 3 张价格是 45 元，另外加洗，每张 3 元. 如果每人各得一张，平均每人需多少钱?

2. 某厂一周生产的机器台数统计表破损了，如下图所示. 请你想办法把星期三、星期四的产量算出来.

星期	一	二	三	四	五	六	平均
台数	89	74	6	8	81	85	79

3. 有 8 个数排成一排，如果左边 5 个数的平均数是 36，右边 5 个数的平均数是 34，这 8 个数的平均数是 32，那么，中间两个数的平均数是多少?

4. 某 5 个数的平均值为 20，若把其中一个数改为 40，则平均值变为 25，求这个数.

5. 有 7 个数排成一列，它们的平均数是 31，前 3 个数的平均数是 29，后 5 个数的平均数是 34，求第三个数.

6. 甲、乙、丙、丁 4 人称体重，乙、丙、丁 3 人共重 120 千克，甲、丙、丁 3 人共重 126 千克，丙、丁 2 人的平均体重是 40 千克. 求 4 人的平均体重是多少千克?

7. 一位同学在期中测验中，除了数学外，其他几门功课的平均成绩是 94 分. 如果数学算在内，平均每门 95 分. 已知他数学得了 100 分，问这位同学一共考了多少门功课?

8. 用 6 元/千克的甲级糖，3.5 元/千克的乙级糖，3 元/千克的丙级糖，混合成 4 元/千克的什锦糖. 如果有甲级糖 1 千克，丙级糖 1 千克，应放入乙级糖多少千克？

9. 某班统计数学考试成绩，得平均成绩 85.13 分. 事后复查，发现将张小云的成绩 87 分误以 78 分计算了. 经重新计算后，该班的平均成绩是 85.31 分. 问这个班共有多少学生？

同步练习参考答案

1. $[45+3\times(18-3)]\div18$

$=(45+45)\div18$

$=5$（元）.

即平均每人需 5 元.

2. $79\times6-(89+74+81+85)=145$（台）

从破损部分看：

$$\begin{array}{r} 6\,\square \\ +\ \square\,8 \\ \hline 1\,4\,5 \end{array}$$

因为和的个位数是 5，8+7=15，所以被加数的个位数是 7，加数的十位数也是 7，7+7=14.

即星期三的产量是 67 台，星期四的产量是 78 台.

3. 8 个数的总和是 $32\times8=256$.

左边 5 个数的总和是 $36\times5=180$.

右边 5 个数的总和是 $34\times5=170$.

$[(180+170)-256]\div2=47$.

即中间两个数的平均数是 47.

4. 平均数从 20 变为 25，平均每个数增加 25−20=5，共增加 $5\times5=25$，因此原来的数为 40−25=15.

5. 前三个数中含有第三个数，后五个数中也含有第三个数，且只重叠这一个数. 所以它们的和减去所有数之和即为第三个数，$29\times3+34\times5-31\times7=40$.

6. 甲：$126-40\times2=46$，乙：$120-40\times2=40$.

$(46+40+40\times2)\div4=41.5$（千克）.

7. 平均后，数学减少 100−95=5（分），这 5 分，分给别的课，每门课分

95−94=1（分），所以，共有(100−95) ÷ (95−94)+1=6（门）.

8. 1 千克甲级糖多出 6−4=2（元），1 千克丙级糖少 4−3=1（元）. 甲级糖多出的 2 元给丙级糖 1 元，剩余 1 元可给 1 ÷ (4−3.5)=2（千克）乙级糖。

列综合算式[6−4− (4−3)] ÷ (4−3.5)=2（千克）.

9. 一共多出 87−78=9（分），这些分数，每人分到了(85.31−85.13)分，可列下式求得人数. (87−78) ÷ (85.31−85.13)=50（人）.

第 2 讲　整数的运算

知识要点

快速准确地计算，是我们需要具备的基本能力．如何实现快速而准确地计算呢？除了练好学校课本上要求的基本计算方法，还要学习一些巧算和速算的技巧．

要实现整数计算的快速准确，常常需要：

（1）改变运算顺序，将算式中的数重新组合．

（2）逆用乘法分配律．

（3）适当添括号、去括号．

常用的运算法则

去括号法则：括号前是加号或乘号时去掉括号不变号；括号前是减号或除号时去掉括号要变号．

添括号法则：加号或乘号后面添括号时括号里不变号；减号或除号后面添括号时括号里要变号．

乘法分配律：$a \times c+b\times c=(a+b)\times c$

经典题再现

计算 100+99−98−97+96+95−94−93+…+4+3−2−1.（**视频**）

解：方法 1：算式中两加两减，所以可以采取 4 个数一组．

原式=(100+99−98−97)+(96+95−94−93)+…+(4+3−2−1)

$$=\underbrace{4+4+\cdots+4}_{25个4}$$

$$=4\times 25$$

$$=100.$$

方法 2：采取 2 个数一组，每组的运算结果都是 2.

原式$=(100-98)+(99-97)+(96-94)+\cdots+(3-1)$

$=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{50个2}$

$=2\times 50$

$=100.$

典型例题

【例 1】　计算 $1\div(2\div 3)\div(3\div 4)\div(4\div 5)\div(5\div 6)$.　（视频）

解：去掉括号重新组合.

原式$=1\div 2\times 3\div 3\times 4\div 4\times 5\div 5\times 6$

$=1\div 2\times(3\div 3)\times(4\div 4)\times(5\div 5)\times 6$

$=1\div 2\times 6$

$=1\times 6\div 2$

$=3.$

【例 2】　计算 $1996\times 19941994-1994\times 19961996$.（视频）

解：为了进行简便运算，我们将 19941994 变形为

$19941994=1994\times 10001$.

同理　$19961996=1996\times 10001$，

原式$=1996\times 1994\times 10001-1994\times 1996\times 10001$

$=0.$

【例 3】　计算 $1995-1+2-3+4-5+\cdots+1948-1949$.　（视频）

解：原式$=1995+(2-1)+(4-3)+(6-5)+\cdots+(1948-1947)-1949$

$=1995-1949+1948\div 2=46+974$

$=1020.$

【例 4】　计算 $1989\times 19911991-1991\times 19891988$.（视频）

解：原式$=1989\times 19911991-1991\times(19891989-1)$

$=1989\times 19911991-1991\times 19891989+1991$

$=1989\times 1991\times 10001-1991\times 1989\times 10001+1991$

$=1991$

【例 5】　求 $4,43,443,\cdots,\underbrace{44\cdots4}_{9个4}3$ 这 10 个数的和.（视频）

解：这 10 个数的个位数字和为 $3\times 9+4=3\boxed{1}$；

这 10 个数的十位数字和为 $4\times 9=36$，加上个位的进位的 3，为$36+3=3\boxed{9}$；

这 10 个数的百位数字和为 $4\times 8=32$，加上十位的进位的 3，为$32+3=3\boxed{5}$；

这 10 个数的千位数字和为 $4\times 7=28$，加上百位的进位的 3，为$28+3=3\boxed{1}$；

这 10 个数的万位数字和为 $4\times 6=24$，加上千位的进位的 3，为$24+3=2\boxed{7}$；

这 10 个数的十万位数字和为 $4\times 5=20$，加上万位的进位的 2，为$20+2=2\boxed{2}$；

这10 个数的百万位数字和为$4\times 4=16$，加上十万位的进位的2，为$16+2=1\boxed{8}$；

这10 个数的千万位数字和为$4\times 3=12$，加上百万位的进位的1，为$12+1=1\boxed{3}$；

这10 个数的亿位数字和为$4\times 2=8$，加上千万位的进位的1，为$8+1=\boxed{9}$；

这 10 个数的十亿位数字和为 $4\times 1=4$，加上亿位上没有进位，即为$\boxed{4}$.

所以，这 10 个数的和为 4938271591.

难题精讲

求 $\underbrace{999\cdots99}_{2000个9}\times\underbrace{999\cdots99}_{2000个9}$.（视频）

解：原式$=\left(1\underbrace{000\cdots0}_{2000个0}-1\right)\times\underbrace{999\cdots9}_{2000个9}=1\underbrace{000\cdots0}_{2000个0}\times\underbrace{999\cdots9}_{2000个9}-\underbrace{999\cdots9}_{2000个9}$

$$=\underbrace{999\cdots99}_{2000个9}\underbrace{000\cdots00}_{2000个0}-\underbrace{999\cdots99}_{2000个9}=\underbrace{999\cdots9}_{1999个9}8\underbrace{00\cdots0}_{1999个0}1$$

同步练习

1．计算 99+198+297+396+495+594+693+792+891+990.（视频）

2．计算 (2000−1)+(1999−2)+(1998−3)+⋯+(1001−1000).

3．计算

1998+1997−1996−1995+1994+1993−1992−1991+1990+1989−1988−1987+⋯+10+9−8−7+6+5−4−3+2+1.（视频）

4．计算 $989898\times 999999\div 10101\div 111111$.（视频）

5．计算 $1998\times 1998+1997\times 1997-1998\times 1997-1997\times 1996$.

6. 计算 $1+2-3+4+5-6+7+8-9+10+11-12+\cdots+97+98-99$.

7. $333\times625\times125\times25\times5\times16\times8\times4\times2$ 的结果末尾有多少个零？（视频）

8. 计算 $5\div(7\div11)\div(11\div15)\div(15\div21)$.（视频）

9. 计算 333333×333333.

10. 计算 $(9999+9997+\cdots+9001)-(1+3+\cdots+999)$.

11. 计算 $19981999\times19991998-19981998\times19991999$.

12. 计算 $2000\times1999-1999\times1998+1998\times1997-1997\times1996+\cdots+2\times1$.

同步练习参考答案

1. 原式 $=99\times1+99\times2+\cdots+99\times10$

$=99\times(1+2+3+4+\cdots+10)$

$=99\times55$

$=5445$.

2. 原式 $=\underbrace{(2000-1000)+(1999-999)+(1998-998)+\cdots+(1001-1)}_{1000组}$

$=\underbrace{1000+1000+\cdots+1000}_{1000个1000}$

$=1000\times1000$

$=1000000$.

3. 原式 $=(1998-1996)+(1997-1995)+(1994-1992)+(1993-1991)+\cdots+$

$(6-4)+(5-3)+2+1$

$=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{998个2}+3$

$=2\times998+3$

$=1999$.

4. 原式 $=989898\div10101\times999999\div111111$

$=98\times9$

$=882$.

5. 原式 $=1998\times1998-1998\times1997+1997\times1997-1997\times1996$.

$=1998+1997$

$=3995$.

6. 原式 $=\underbrace{(1+2-3)+(4+5-6)+(7+8-9)+\cdots+(97+98-99)}_{33组}$

$=0+3+6+9+\cdots+93+96$

$=(0+96)\times 33\div 2$

$=1584.$

7. $16\times 625=10000$，$8\times 125=1000$，$4\times 25=100$，$2\times 5=10.$

即其结果末尾共有 10 个 0.

8. 原式$=5\div 7\times 11\div 11\times 15\div 15\times 21$

$=5\div 7\times 21$

$=5\times 21\div 7$

$=15.$

9. 333333×333333

$=(333333\times 3)\times(333333\div 3)$

$=999999\times 111111$

$=(1000000-1)\times 111111$

$=1000000\times 111111-1\times 111111$

$=111111000000-111111$

$=111110888889.$

10. 原式$=(9999-999)+(9997-997)+(9995-995)+\cdots+(9001-1)$

$=\underbrace{9000+9000+\cdots+9000}_{500个9000}$

$=4500000.$

11. $(19981998+1)\times 19991998-19981998\times 19991999$

$=19981998\times 19991998-19981998\times 19991999+19991998$

$=19991998-19981998$

$=10000.$

12. 原式$=1999\times(2000-1998)+1997\times(1998-1996)+\cdots+3\times(4-2)+2\times 1$

$=(1999+1997+\cdots+3+1)\times 2$

$=2000000.$

第 3 讲　正整数分拆

知识要点

把几个自然数加在一起得出一个自然数，这是求和. 反过来把一个自然数表示成若干个自然数的和的形式，就称为这个自然数的一种分拆，如：

6=1+5=2+4=3+3

=1+1+4=1+2+3

=1+1+1+3=1+1+2+2

=1+1+1+1+1+1.

我们把一个自然数分成 2 个自然数的和叫二项分拆，分成 3 个自然数的和叫三项分拆，…

经典题再现

用 20 厘米长的铁丝围成一个长方形，要使长方形的长和宽都是整数，并且面积最大，它的长和宽分别是多少？（**视频**）

解：2×(长+宽)=20，　长+宽=10.

需要把 10 分拆成两个整数的和.

10=1+9=2+8=3+7=4+6=5+5.

10 可以分拆成 5 种不同的方式.

我们分别计算这 5 种分拆的乘积：1×9=9，2×8=16，3×7=21，4×6=24，5×5=25.

围成长和宽都是 5 的正方形面积最大.

典型例题

【例 1】 求 10 的三项分拆与四项分拆的种数. （**视频**）

解：10 的三项分拆：

10=1+1+8=1+2+7=1+3+6=1+4+5

=2+2+6=2+3+5=2+4+4

=3+3+4.

10 的四项分拆：

10=1+1+1+7=1+1+2+6=1+1+3+5

=1+1+4+4=1+2+2+5=1+2+3+4

=1+3+3+3=2+2+2+4=2+2+3+3.

所以，10 的三项分拆有 8 种，10 的四项分拆有 9 种.

【例 2】 把 17 本相同的书分给 5 名同学，使每位同学的书本数各不相同，应怎样分？（**视频**）

解：把 17 分成 5 个不同的自然数. 我们先试验

1+2+3+4+5=15，还少 2 本.

可以把这 2 本给 5，或把 2 本给 4；也可以 1 本给 4，1 本给 5.

这样分拆出两种：1+2+3+5+6=1+2+3+4+7.

答：每人 1,2,3,4,7 或 1,2,3,5,6 本.

【例 3】 把 8 分成若干个自然数的和，使这些数的乘积最大. （**视频**）

解：若拆成 2 个数，则最大乘积为 $4\times4=16$；

若拆成 3 个数，则最大乘积为 $2\times3\times3=18$；

若拆成 4 个数，则最大乘积为 $2\times2\times2\times2=16$；

若拆成 5 个数，则最大乘积为 $1\times1\times2\times2\times2=8$；

…

发现再拆下去，其乘积反而小了.

综上所述，把 8 拆成 2,3,3 这 3 个数的和时，其乘积最大，为 18.

【例 4】 把 15 分拆成不同的 3 个自然数，其中每个数都是不同的一位数时，有几种分拆?请你写出每种拆法. （**视频**）

分析：分拆时，按从小到大的顺序排列，这样可以避免重复.

解：1 开头，第二个数最小是 5，可拆出如下两种：

15=1+5+9=1+6+8.

2 开头，第二个数最小是 4.

15=2+4+9=2+5+8=2+6+7.

3 开头，第二个数最小是 4.

15=3+4+8=3+5+7.

4 开头，只有 1 种拆法.

15=4+5+6.

【例 5】 求满足下列条件的最小自然数：它既可以表示为 9 个连续自然数之和，又可以表示为 10 个连续自然数之和，还可以表示为 11 个连续自然数之和.（**视频**）

解：9 个连续自然数之和是其中第 5 个数的 9 倍，10 个连续自然数之和是其中第 5 个数和第 6 个数之和的 5 倍，11 个连续自然数之和是其中第 6 个数的 11 倍. 这样，可以表示为 9 个、10 个、11 个连续自然数之和的数必是 5, 9 和 11 的倍数，故最小的这样的数是［5,9,11］= 495.

对 495 进行分拆可利用平均数，采取“以平均数为中心，向两边推进的方法”. 例如，$495 \div 10=49.5$，则 10 个连续的自然数为 45,46,47,48,49,（49.5）,50,51,52,53,54.

于是 495=45+46+…+54.

同理可得 495=51+52+…+59=40+41+…+50.

【例 6】 若干只同样的盒子排成一列，小聪把 42 个同样的小球放在这些盒子里，然后外出，小明从每只盒子里取出一个小球，然后把这些小球再放到小球数最少的盒子里去，再把盒子重排了一下. 小聪回来，仔细查看，没有发现有人动过小球和盒子. 问一共有多少只盒子？（**视频**）

解：设原来小球数最少的盒子里装有 a 只小球，现在增加到了 b 只，由于小明没有发现有人动过小球和盒子，这说明现在又有了一只装有 a 个小球的盒子，这只盒子里原来装有（a+1）个小球.

同理，现在另有一个盒子里装有（a+1）个小球，这只盒子里原来装有（a+2）个小球.

依次类推，原来还有一只盒子装有（a+3）个小球，（a+4）个小球等，故原来那些盒子中装有的小球数是一些连续整数.

现在这个问题就变成了：将 42 分拆成若干个连续整数的和，求总的分法种数和每一种分法的加数个数.

因为 $42=6\times 7$，故可将 42 看成 7 个 6 的和，

又(7+5)+(8+4)+(9+3)是 6 个 6，从而 42=3+4+5+6+7+8+9，

一共有 7 个加数.

又因 42=14×3，故可将 42 写成 13+14+15，一共有 3 个加数.

又因 42=21×2，故可将 42 写成 9+10+11+12，一共有 4 个加数.

于是原题有三个解：一共有 7 只盒子、4 只盒子或 3 只盒子.

难题精讲

有一把长为 13 厘米的直尺，在上面刻几条刻度线，使得这把尺子能一次量出 1 到 13 厘米的所有整厘米的长度. 问至少要刻几条线？要刻在哪些位置上？（**视频**）

解：这个题实际上是要找到若干自然数，是 1~12 均可以表示成其中两个数的差.

只有 3 个刻度是不够的. 如果只刻了 3 条线，刻在 a 厘米、b 厘米、c 厘米处（$0<a<b<c<13$），那么 $a,b,c,13$ 两两之差（大减小），只有至多 6 个不同的数，即 $13-a$，$13-b$，$13-c$，$c-a$，$c-b$，$b-a$，再加上 a，b，c，13 这 4 个数，至多有 10 个不同的数，不可能得到 1 到 13 这 13 个不同的整数来.

至少要刻 4 条线，例如刻在 1,4,5,11 厘米处，便可一次量出 1 到 13 厘米的所有整厘米的长度. 这是因为由 1,4,5,11,13 这 5 个数以及它们之间任意 2 个的差能够得到 1 到 13 这 13 个整数，见下列各式：

5−4=1，13−11=2，4−1=3，

11−5=6，11−4=7，13−5=8，

13−4=9，11−1＝10，13−1＝12.

以上刻法不是唯一的. 例如我们也可以刻在 1 厘米、2 厘米、6 厘米、10 厘米这 4 个位置上.

同步练习

1. 11 与 12 分别有多少个二项分拆？在所有的二项分拆中，两项乘积最大的是多少？

2. 设某个自然数的各位数字之和为 19，试求这个自然数的最小值.

3. 用一个 5 分币、四个 2 分币、八个 1 分币买一张 8 分邮票，共有多少种付币方式?

4. 各个数位数字之和为 25 的三位数共有多少个?

5. 把 29 只鸽子分养在 5 处，使每处的鸽子数为互不相同的奇数，该如何分养?

6. 电视台要播放一部 30 集电视连续剧，若要求每天安排播出的集数互不相等，则该电视连续剧最多可以播多少天?

7. 把 37 拆成若干个不同的质数之和，有多少种不同的拆法? 将每一种拆法中所拆出的那些质数相乘，得到的乘积中，哪个最小?

8. 将 210 拆成 7 个自然数的和，使这 7 个数从小到大排成一行后，相邻两个数的差都是 5. 第 1 个数与第 6 个数分别是多少?

9. 几个连续自然数相加，和能等于 2000 吗? 如果能，写出三种答案. 如果不能，说明理由.

10. 把 70 分拆成 11 个不同自然数的和，这样的分拆方式一共有多少种? 将不同的表示方法列举出来.

同步练习参考答案

1. 11 的二项分拆有 5 个，12 的二项分拆有 6 个. 乘积依次是:

$1\times10=10$	$1\times11=11$
$2\times9=18$	$2\times10=20$
$3\times8=24$	$3\times9=27$
$4\times7=28$	$4\times8=32$
$5\times6=30$	$5\times7=35$
	$6\times6=36$

把 11 分成 5+6 时，其乘积最大；把 12 分成 6+6 时，其乘积最大.

2. 数字要小，数位要少. 因为 3 位数永远大于 2 位数.

另外，数位相同时，首位数越小，数越小. 所以首位数选 1.

19−1=18，其余数最少 2 个，并且是 2 个 9.

19=1+9+9，最小是 199.

这个自然数的最小是 199.

3. 共 7 种:

8=5+2+1=5+1+1+1=2+2+2+2=2+2+2+1+1=2+2+1+1+1+1=2+1+1+1+1+1+1
=1+1+1+1+1+1+1+1.

4. 25 ÷ 3=8……1，

25=8+8+9=7+9+9.

889, 898, 988, 799, 979, 997 共 6 个.

5. 1+3+5+7+9=25，只能将剩下的 4，分成 2 个 2，分别给 7 和 9，或将 4 给 9. 所以只有两种答案，即 29=1+3+5+9+11=1+3+5+7+13.

6. 由于希望播出的天数尽可能多，所以，在每天播出的集数互不相等的条件下，每天播放的集数应尽可能少.

我们知道，1+2+3+4+5+6+7=28. 如果各天播出的集数分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 时，那么 7 天共可播出 28 集，还剩 2 集未播出. 由于已有过一天播出 2 集的情形，因此，这余下的 2 集不能再单独于一天播出，而只好把它们分到以前的日子，通过改动某一天或某二天播出的集数，来解决这个问题. 例如，各天播出的集数安排为 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 或 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 都可以.

所以最多可以播 7 天.

7. 比 37 小的最大质数是 31，但 37−31=6，6 不能分拆为不同的质数之和，故不取；比 37 小的质数是 29，37−29=8，而 8=3+5. 其余的分拆考虑与此类似.

37=3+5+29
=2+5+7+23=3+11+23
=2+3+13+19=5+13+19
=7+11+19=2+5+11+19
=7+13+17=2+5+13+17
=2+7+11+17，

共 10 种不同拆法，其中 $3\times5\times29=435$ 最小.

8. 这 7 个数中第 4 个数是中间数，它是这 7 个数的平均数，即 210÷7=30. 因为相邻 2 数的差都是 5，所以这 7 个数是 15,20,25,30,35,40,45.

故第 1 个数是 15，第 6 个数是 40.

9. 能.

$2000=2^4\times5^3$，有三个大于 1 的奇约数 5,25,125. 对于 5，设拆分后首项为

a，项数为 k. 对于 5，有 k=5，a=398；对于 25，有 k=25，a=68；对于 125，有 k=32，a=47.

所以 2000 有如下三种分拆方法：

2000=398+399+400+401+402

=68+69+70+⋯+91+92

=47+48+49+⋯+77+78.

10.

1+2+3+⋯+11=66，现在要将 4 分配到适当的加数上，使其和等于 70，又要使这 11 个加数互不相等.

先将 4 分别加在后 4 个加数上，得到 4 种分拆方法：

70=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+15

=1+2+3+4+5+6+7+8+9+14+11

=1+2+3+4+5+6+7+8+13+10+11

=1+2+3+4+5+6+7+12+9+10+11.

再将 4 拆成 1+3，把 1 和 3 放在适当的位置上，仅有 1 种新方法，即

1+2+3+4+5+6+7+8+9+13+12.

再将 4 拆成 1+1+2 或 1+1+1+1+1 或 2+2，分别加在不同的位置上，都得不出新的分拆方法，故这样的分拆方法一共有 5 种.

第4讲 计数问题

知识要点

我们在四年级时已经学习过用枚举、画图、列表等方法解决计数问题. 关键是要掌握条理，要有顺序、有章法地统计.

在此基础上，本讲增加了分类讨论. 通过分类，使问题条理性更强.

经典题再现

在两位整数中，十位数字小于个位数字的共有多少个？（**视频**）

解：十位上是 1 的，共有 8 个，即 12，13，14，15，16，17，18，19；

十位上是 2 的，共有 7 个，即 23，24，25，26，27，28，29；

十位上是 3 的，共有 6 个，即 34，35，36，37，38，39；

…

十位上是 9 的，共有 0 个；

所以，共有 8+7+6+5+4+3+2+1=36（个）.

典型例题

【例 1】 在 100,101,102,…,1998,1999,2000 的所有自然数中，百位数字与十位数字相同的自然数有多少个？（**视频**）

解：100~199 之间百位数字与十位数字相同的自然数有 110,111,…,119 共 10 个；

200~299 之间百位数字与十位数字相同的自然数有 220,221,…,229 共 10 个；

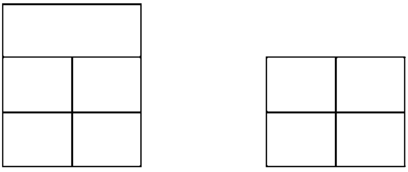
…

1900~1999 之间百位数字与十位数字相同的自然数有 1990,1991,…,1999 共 10 个.

2000 也是一个.

所以，共有 $10\times19+1=191$（个）.

【例 2】 下左图所示是一家窗户的图形，这个图形中有多少个长方形？**（视频）**



解：先去掉上面的长方形，变成一个“田”字形图，如上右图所示. 共有 $3\times3=9$（个）长方形；

增加了上面的长方形后，又增多了 3 个长方形，所以，一共有 $9+3=12$（个）长方形.

【例 3】 6 份同样的礼物全部分给 4 个孩子，使每个孩子至少获得一份礼物的不同分法有多少种？**（视频）**

解：$6-4=2$（份），在先给每个孩子一份礼物后还多出两份礼物，这两份礼物可以只分给一个孩子，或者分给两个孩子，在前一种情形下，得到 $2+1=3$（份）礼物的可以是四个孩子中的任意一个，有 4 种分法. 在后一种情形下，设 4 个孩子的名字分别为甲、乙、丙、丁，则多得到礼物的两个孩子可能是甲、乙，甲、丙，甲、丁，乙、丙，乙、丁，丙、丁，共有 6 种分法. 合计 $4+6=10$（种）分法.

【例 4】 24 支足球队进行循环赛，决出冠军要进行多少场比赛?如果是淘汰赛，决出冠军要进行多少场比赛？**（视频）**

解：将 24 支球队编号为 1,2,3,…,24.

1 号与 2 号,3 号,4 号,…, 24 号各赛 1 场，共 23 场.

2 号与 3 号,4 号,5 号,…,24 号各赛 1 场，共 22 场.

…

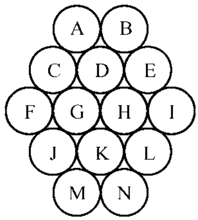
23 号与 24 号赛 1 场.

总计 $23+22+21+\cdots+2+1=276$（场）.

如果是淘汰赛，每场淘汰 1 个队，共淘汰 23 个队（只有冠军没有被淘汰），比赛 $24-1=23$（场）.

所以，循环赛决出冠军要进行 276 场比赛，淘汰赛决出冠军要进行 23 场比赛.

【例 5】 14 个相同的小圆圈紧密地排列在一起，规定每相邻的两个圆圈为一对，（例如：A 与 B，A 与 C，A 与 D）那么共有多少对？**（视频）**



解：从字母 A 开始枚举：

A–B, A–C, A–D；

B–D, B–E；

C–D, C–F, C–G；

D–E, D–G, D–H；

E–H, E–I；

F–G, F–J；

G–J, G–H, G–K；

H–I, H–K, H–L；

I–L；

J–K, J–M；

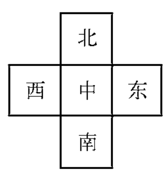
K–L, K–M, K–N；

L–N；

M–N.

共 29 对.

【例 6】 把 1995,1996,1997,1998,1999 这 5 个数分别填入下图中的东、南、西、北、中 5 个方格内，使横、竖 3 个数的和相等．那么共有多少种不同填法？**（视频）**



解：显然只要有“东”+“西”=“南”+“北”即可，剩下的一个数字即为“中”.

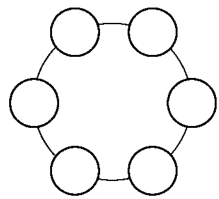
因为题中 5 个数的千位、百位、十位均相同，所以只用考虑个位数字，显然有 5+9=6+8，5+8=6+7，6+9=7+8.

先考察 5+9=6+8，可以对应为“东”+“西”=“南”+“北”，因为“东”、“西”可以互换，“南”、“北”可以互换，有 $2\times2=4$（种）填法，而“东、西”，“南、北”可以整体对调，于是有 $4\times2=8$（种）填法.

5+8=6+7，6+9=7+8，同理均有 8 种填法，所以共有 $8\times3=24$（种）不同的填法.

难题精讲

从 1 至 9 这 9 个数字中选出 6 个不同的数填在下图的 6 个圆圈内，使任意相邻两个圆圈内数字之和都是质数．那么共能找出多少种不同的选法？（6 个数字相同、排列次序不同的都算同一种.）（**视频**）



解：显然任意两个相邻圆圈中的数一奇一偶，因此，应从 2,4,6,8 中选 3 个数填入 3 个不相邻的圆圈中．下面我们分类讨论.

（1）填入 2,4,6，这时 3 与 9 不能同时填入（否则总有一个与 6 相邻，和 3+6 或 9+6 不是质数)．没有 3,9 的有 1 种；有 3 或 9 的，其他 3 个奇数 1,5,7 要去掉 1 个，因而有 $2\times3=6$（种)，共 1+6＝7（种).

（2）填入 2,4,8．这时 7 不能填入（因为 7+2，7+8 都不是质数)，从其余 4 个奇数中选 3 个，有 4 种选法，都符合要求.

（3）填入 2,6,8．这时 7 不能填入，而 3 与 9 只能任选 1 个，因而有 2 种选法.

（4）填入 4, 6, 8．这时 3 与 9 只能任选 1 个，1 与 7 也只能任选 1 个．因而有 $2\times2=4$（种）选法.

总共有 7+4+2+4=17（种）选法.

答：共有 17 种选法.

同步练习

1. 从甲地到乙地有 2 条路可走，从乙地到丙地有 3 条路可走，试问从甲地经乙地到丙地共有多少种不同的走法？（**视频**）

2. 有 10 面红旗，10 面蓝旗，10 面绿旗，把任意两面上、下挂在旗杆上

都可以表示一种信号．问共可以组成多少种不同的信号？

3．用数字 1,2,5,7,8 可以组成多少个没有重复数字的三位偶数？**（视频）**

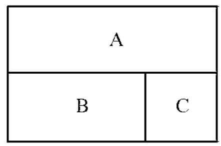
4．从 A 到 B 有 4 条路可走 ，从 B 到 C 有 3 条路可走，从 A 到 C 还有 2 条路可直接到达．问从 A 到 C 一共有多少种不同的走法？

5．用两个数字组成两个两位数，使它们的差是 36，这样所组成的所有的两位数的和是多少？

6．不含数字 1,3,7 的两位自然数共有多少个？

7．用两个 3、一个 1、一个 2 可组成不同的四位数，这些四位数共有多少个？

8．如下图所示，A,B,C 三个方格，现在有红、蓝、黄、绿 4 种颜色给图中方格染色，使相邻方格的颜色不同，问有多少种不同的染色方法？

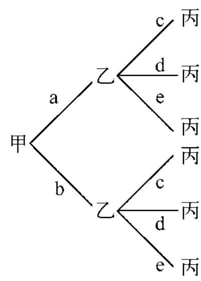


9．有些五位数的各位数字均取自 1,2,3,4,5，并且任意相邻两位数字（大减小）的差都是 1．问这样的五位数共有多少个？

同步练习参考答案

1．从甲到乙的两条路叫 a,b；从乙到丙的三条路叫 c,d,e.

共有 6 种走法．画一个树形图如右图所示.



2．枚举法：

红红，蓝蓝，绿绿，红蓝，蓝红，红绿，绿红，蓝绿，绿蓝.

共 9 种.

3．分为两类枚举．偶数的个位数只能是 2 或 8.

个位是 2 的有 152,512,172,712,182,812,572,752,582,852,782,872.

个位是 8 的有 128,218,158,518,178,718,258,528,278,728,578,758.

共 24 个.

4．从 A 经 B 到 C，共有 $4\times3=12$（种）.

从 A 直接到 C，有 2 种走法，共有 $12+2=14$（种）.

5．一共有 5 对数符合条件，即 $51-15=62-26=73-37=84-48=95-59=36$.

和是 51+15+62+26+73+37+84+48+95+59=550.

6．两位数共有 90 个，其中十位数字是 1,3,7 的共有 30 个，还剩 60 个，这 60 个数中个位数字是 1,3,7 的有 18 个，所以不含数字 1,3,7 的两位自然数共有 90−30−18=42（个）.

7．两个 3 的位置每确定一次就可以得到 2 个不同的四位数.一个四位数由千位数字、百位数字、十位数字和个位数字组成，两个 3 可能在千位和百位上，或在千位和十位上，或在千位和个位上，或在百位和十位上，或在百位和个位上，或在十位和个位上. 共 6 种可能.

所以四位数共有 $2\times6=12$（个）.

8．A 格 4 种染法，B 格 3 种染法，C 格 2 种染法.

共 $4\times3\times2=24$（种）.

9．我们一一列出当首位数字是 5,4,3 时的情况，见下表.

首位数字	5	4	3
所有满足题意的数字列表	$5-4\left\{\begin{array}{l}5-4-\left\{\begin{array}{l}5\\3\end{array}\right.\\3-\left\{\begin{array}{l}4-\left\{\begin{array}{l}5\\3\end{array}\right.\\2-\left\{\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$	$4-\left\{\begin{array}{l}5-4-\left\{\begin{array}{l}5-4\\3-\left\{\begin{array}{l}2\\4\end{array}\right.\end{array}\right.\\3-\left\{\begin{array}{l}4-\left\{\begin{array}{l}5-4\\3-\left\{\begin{array}{l}4\\2\end{array}\right.\end{array}\right.\\2-\left\{\begin{array}{l}3-\left\{\begin{array}{l}4\\2\end{array}\right.\\1-2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$	$3-\left\{\begin{array}{l}4-\left\{\begin{array}{l}5-4-\left\{\begin{array}{l}5\\3\end{array}\right.\\3-\left\{\begin{array}{l}4-\left\{\begin{array}{l}5\\3\end{array}\right.\\2-\left\{\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\\2-\left\{\begin{array}{l}3-\left\{\begin{array}{l}4-\left\{\begin{array}{l}5\\3\end{array}\right.\\2-\left\{\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right.\end{array}\right.\\1-2-\left\{\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$
满足题意的数字个数	6	9	12

因为对称的缘故，当首位数字为 1 时的情形等同于首位数字为 5 时的情形，首位数字为 2 时的情形等同于首位数字为 4 时的情形.

所以，满足题意的五位数共有 $6+9+12+9+6=42$（个）.

第 5 讲　行程问题（一）

知识要点

解决行程问题，要明白以下关系：

（1）一般情况　　　　**路程=速度×时间**

（2）相遇问题　　　　**路程=速度和×相遇时间**

（3）追及问题　　　　**路程=速度差×追及时间**

对于比较复杂的行程问题，我们还要理清题中已知条件与所求问题之间的关系，同时采用“转化”“假设”等方法，把复杂的数量关系转化为简单的数量关系，把一个复杂的问题转化为几个简单的问题逐一解决.

（4）平均速度问题　　**平均速度=总路程÷总时间**

经典题再现

甲、乙两人在周长是 400 米的环形跑道上跑步. 如果两人从同一地点出发背向而行，那么经过 2 分钟相遇；如果两人从同一地点出发同向而行，那么经过 20 分钟相遇. 已知甲的速度比乙快，求甲、乙两人跑步的速度各是多少？（**视频**）

解：背向而行，两人的速度和为 400÷2=200（米/分钟），

同向而行，两人的速度和为 400÷20=20（米/分钟）.

甲每分钟跑(200+20)÷2=110（米），

乙每分钟跑 200−110=90（米）.

答：甲的速度为 110 米/分钟，乙的速度为 90 米/分钟.

典型例题

【例 1】 兄弟俩骑车郊游，弟弟先出发，速度是每分钟行 200 米，5 分钟后，哥哥带一条狗出发，以每分钟 250 米的速度去追弟弟，而狗则以每分钟

300 米的速度向弟弟跑去，追上弟弟后又立即返回，遇到哥哥后又立即向弟弟追去，直到哥哥追上弟弟时狗跑了多少米？（**视频**）

分析：狗跑的时间实际上是哥哥追上弟弟所用的时间.

解：$200\times5\div(250-200)=20$（分钟），

$300\times20=6000$（米）.

答：哥哥追上弟弟时狗跑了 6000 米.

【例 2】 小明家离学校 600 米，去时每分钟行 100 米，返回时每分钟行 60 米，求小明往返的平均速度.（**视频**）

分析：本题可根据平均速度的计算公式直接求解.

解：总路程$=600\times2=1200$（米），

总时间$=600\div100+600\div60=16$（分钟）.

平均速度$=1200\div16=75$（米/分钟）.

答：小明往返的平均速度是 75 米/分钟.

【例 3】 小强和小江进行百米赛跑. 已知小强第一秒跑 1 米，以后每秒都比前面 1 秒多跑 0.1 米；小江则自始至终按每秒 1.5 米的速度跑. 问他们二人谁能取胜？（**视频**）

解：$(1.5-1)\div0.1=5$（秒），

$5\times2+1=11$（秒）.

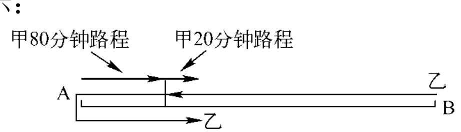
前 5 秒小江比小强快，6~11 秒小强比小江快，到第 11 秒结束时两人都跑了 $1.5\times11=16.5$（米）.

此后小强快于小江，所以最后小强能取胜.

答：小强能取胜.

【例 4】 A、B 两地间有条公路，甲从 A 地出发步行到 B 地，乙骑摩托车从 B 地不停地往返于 A、B 两地之间. 若他们同时出发，80 分钟后两人第一次相遇，100 分钟后乙第一次追上甲. 问当甲到达 B 地时，乙追上甲几次？（**视频**）

解：如下图所示：



摩托车 20 分钟走的路程是步行 180 分钟的路程. 所以摩托车的速度是步

行的 9 倍.

即甲走一个单程，乙走 9 个单程.

乙走第一个单程是相遇，第二个单程是追上，第三个单程又是相遇，第四个单程是追上，…，即偶数单程是追上，共 4 次.

答：乙追上甲 4 次.

【例 5】 甲、乙两船分别在一条河的 A、B 两地同时相向而行，甲船顺流而下，乙船逆流而上．相遇时，甲、乙两船行了相等的航程，相遇后继续前进，甲船到达 B 地、乙船到达 A 地后，都立即按原来路线返航，两船第二次相遇时，甲船比乙船少行 1000 米．如果从第一次相遇到第二次相遇的时间相隔为 1 小时 20 分钟，那么河水的流速为每小时多少千米？（**视频**）

分析：因为甲、乙两船第一次相遇时行驶的路程相等，所以有甲、乙两船同时刻各自到达 B、A 两地．接着两船再分别从 B、A 两地往 A、B 中间行驶．所以在第二次相遇前始终是一船逆流、一船顺流，那么它们的速度和始终等于它们在静水中的速度和，则

甲船静水速度+水速=乙船静水速度－水速.

另外，从开始到甲船第一次到达 B 地，乙船第一次到达 A 地之前，两船在河流中的速度相等．所以甲船比乙船少行驶的 1000 米是在甲船、乙船各自返航时产生的.

解：甲、乙两船返航时，甲船在河流中行驶的速度为甲船静水速度-水速，乙船在河流中的速度为乙船静水速度+水速．它们的速度差为 4 倍水速.

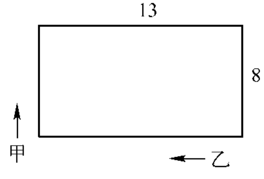
从第一次相遇到第二次相遇，两船共行驶了 2 个 A 至 B 的路程，而从返航到第二次相遇两船共行驶了 A 至 B 的路程，需时间 $80\div2=40$（分钟）.

4 倍水速 $=1000\div(40\div60)=1000\div40\times60=1500$，

水速=375 米/小时=0.375 千米/小时.

答：河水的流速为每小时 0.375 千米.

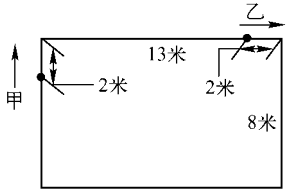
【例 6】 如右图所示，一个长方形的房屋长 13 米，宽 8 米．甲、乙两人分别从房屋的两个墙角出发，甲每秒钟行 3 米，乙每秒钟行 2 米. 问经过多长时间甲第一次看见乙？（**视频**）



解：开始时，甲在顺时针方向距乙 $8+13+8=29$（米）．因为一边最长为 13，所以最少要追至只相差 13，即至少要追上 $29-13=16$（米）.

甲追上乙 16 米所需时间为 $16\div(3-2)=16$（秒），此时甲行了 $3\times16=48$（米），乙行了 $2\times16=32$（米）.

甲、乙的位置如下图所示：



显然甲还是看不见乙，但是因为甲的速度比乙快，所以甲能在乙离开上面的那条边之前到达上面的边，从而看见乙.

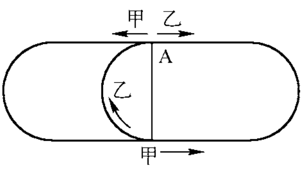
而甲要到达上面的边，需再跑 2 米，所需时间为 $2\div3=0.667$（秒）.

所以经过 $16+0.667=16.667$（秒）后甲第一次看见乙.

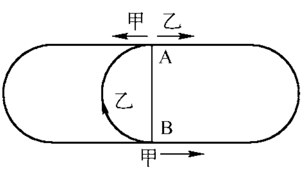
答：经过 16.667 秒甲第一次看见乙.

难题精讲

如下图所示，学校操场的 400 米跑道中套着 300 米小跑道，大跑道与小跑道有 200 米路程相重．甲以每秒 6 米的速度沿大跑道逆时针方向跑，乙以每秒 4 米的速度沿小跑道顺时针方向跑，两人同时从两跑道的交点 A 处出发，当他们第二次在跑道上相遇时，甲共跑了多少米？（**视频**）



分析：如下图所示，甲、乙只可能在大跑道上相遇．并且只能在 A 至 B 顺时针的半跑道上.



解：已知小跑道 A 至 B 逆时针路程为 100，顺时针路程为 200，大跑道上 A 至 B 的顺、逆时针路程均是 200 米.

当甲第一次到达 B 时，乙还没有到达 B 点，所以第一次相遇一定在逆时针的 B、A 间的某处.

而当乙第一次到达 B 点时，所需时间为 $200\div4=50$（秒），此时甲跑了 $50\times6=300$（米），在 B 点 $300-200=100$（米）处.

乙跑出小跑道到达 A 需 $100\div4=25$（秒），则甲又跑了 25 6=150（米），在 A 点左边 $(100+150)-200=50$（米）处.

所以当甲到达 B 处时，乙还未到 B 处，那么甲必定能在 B 处右边某处与乙第二次相遇.

从乙再次到达 A 处开始计算，还需 $(400-50)\div(6+4)=35$（秒），甲、乙第二次相遇，此时甲共跑了 $50+25+35=110$（秒）.

所以，从开始到甲、乙第二次相遇甲共跑了 $110\times6=660$（米）.

同步练习

1. 甲、乙两人分别从 A、B 两地同时出发．如果两人同向而行，甲 26 分钟赶上乙；如果两人相向而行，6 分钟可相遇．又已知乙每分钟行 50 米，求 A、B 两地的距离．（**视频**）

2. 一架飞机往返相距 1620 千米的甲、乙两地，飞出时，每小时飞行 810 千米；返回时，每小时飞行 540 千米．这架飞机往返的平均速度是每小时多少千米?

3. 小华爬山，上山的速度是每小时 2 千米，到达山顶后立即下山，下山的速度是每小时 6 千米. 小华上、下山的平均速度是多少千米/小时？

4. 王明回家，距家门 300 米时妹妹和小狗一齐向他奔来，王明和妹妹的速度都是每分钟 50 米，小狗的速度是每分钟 200 米，小狗遇到王明后用同样的速度不停往返于王明与妹妹之间．当王明与妹妹相距 10 米时，小狗一共跑了多少米?

5. 小明骑车 2 小时行的路程比小军步行 5 小时的路程多 8 千米，已知小明骑车的速度比小军步行的速度每小时快 10 千米，那么小军步行的速度是每小时多少千米？

6. 快车和慢车同时从甲、乙两地相向开出，快车每小时行 40 千米，经过 3 小时，快车已行驶过中点 25 千米，这时快车与慢车还相距 7 千米. 慢车每小时行多少千米?

7. 甲、乙两人上午 8 时同时从东村骑车到西村去，甲每小时比乙快 6 千米. 中午 12 时甲到西村后立即返回东村，在距西村 15 千米处遇到乙. 求东西两村相距多少千米?

8. 甲、乙两车上午 8 时分别从 A、B 两地同时相向出发，到 10 时两车相距 112.5 千米. 两车继续行驶到下午 1 时，两车相距还是 112.5 千米. 求 A、B 两地间的距离.

9. 甲、乙两人骑自行车从环形公路上同一地点同时出发，背向而行. 现在已知甲走一圈的时间是 70 分钟，如果在出发后 45 分钟甲、乙两人相遇，那么乙走一圈的时间是多少分钟?

10. 甲、乙两车的速度分别为 52 千米/小时和 40 千米/小时，它们同时从甲地出发到乙地去，出发后 6 小时，甲车遇到一辆迎面开来的卡车，1 小时后乙车也遇到了这辆卡车. 求这辆卡车的速度.

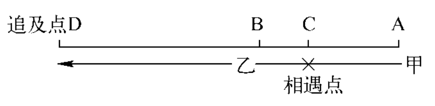
同步练习参考答案

1. 由题意可知，甲从 A 到 C 用 6 分钟，从 A 到 D 用 26 分钟，则从 C 到 D 用 26−6=20（分钟）.

又知，$CD=BC+BD$，乙走 CD 用 26+6=32（分钟），所以，$CD=50\times 32=1600$（米）.

甲速=$1600\div 20=80$（米/分钟）.

A、B 之间的距离=$(50+80)\times 6=780$（米）.



2. 总路程为 $1620\times 2=3240$（千米）.

总时间为 $1620\div 810+1620\div 540=5$（小时）.

平均速度为 $3240\div 5=648$（千米/小时）.

3. 设山脚到山顶的路程为 6 份.

$6\times2\div(6\div2+6\div6)=3$（千米/小时）.

4. 小狗跑$(300-10)\div(50+50)=2.9$（分钟），$200\times2.9=580$（米）.

5. 小明骑车 2 小时比小军步行 2 小时多 $10\times2=20$（千米）.

小明骑车 2 小时比小军步行 5 小时多 8 千米.

所以，小军步行 3 小时行 $20-8=12$（千米）.

小军速度为 $12\div3=4$（千米/小时）.

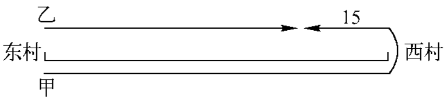
6. 快车 3 小时共行驶 $40\times3=120$（千米）.

甲、乙两地的距离的一半是 $120-25=95$（千米）.

慢车的速度是$(95-25-7)\div3=21$（千米）.

或 $(40\times3-25\times2-7)\div3=21$（千米）.

7. 如下图所示



二人相遇时甲比乙多行 $15\times2=30$（千米），说明二人已经行了 $30\div6=5$（小时），从上午 8 时到中午 12 时是 4 小时，所以甲的速度是 $15\div(5-4)=15$（千米/小时）. 则东西两村的距离是 $15\times(5-1)=60$（千米）.

或 $15\div(15\times2\div6-4)\times(5-1)=60$（千米）.

8. 从 10 时到下午 1 时共经过 3 小时，3 小时里，甲、乙两车从相距 112.5 千米到又相距 112.5 千米，共行 $112.5\times2=225$（千米）. 所以两车的速度和是 $225\div3=75$（千米/小时）. 从上午 8 时到 10 时共经过 2 小时，两车共行 $75\times2=150$（千米），因此 A、B 两地的距离是 $150+112.5=262.5$（千米）.

$112.5\times2\div3\times2+112.5=262.5$（千米）.

9. 甲行走 45 分钟，再行走 $70-45=25$（分钟）即可走完一圈. 而甲行走 45 分钟，乙行走 45 分钟也能走完一圈. 所以甲行走 25 分钟的路程相当于乙行走 45 分钟的路程.

甲行走一圈需 70 分钟，所以乙需 $70\div25\times45=126$（分钟）.

即乙走一圈的时间是 126 分钟.

10. 行程问题中的相遇问题，关注的就是两个物体的速度和. 只要知道 1

小时内乙车和卡车走的路程就知道两车的速度和；而乙车和甲车 6 小时相距的距离刚好就是乙车与卡车 1 小时合起来走的距离.

甲、乙两车 6 小时相距$(52-40)\times 6=72$（千米），

也就是说乙车和卡车的速度和就是 72 千米/小时，

卡车的速度为 $72-40=32$（千米/小时）.

第6讲 小数运算

知识要点

小数运算规则与整数运算规则相同，如添括号、去括号、凑整等.

这里特别要注意的是小数点的处理.

经典题再现

计算 $28.4\times187-15.4\times284+3.3\times16$.（视频）

解：原式$=284\times18.7-15.4\times284+3.3\times16$

$=284\times(18.7-15.4)+3.3\times16$

$=284\times3.3+3.3\times16$

$=3.3\times(284+16)$

$=3.3\times300$

$=990$.

典型例题

【例 1】 计算 $1.1+3.3+5.5+7.7+11.11+13.13+15.15+17.17+19.19$.（视频）

解：原式$=1.1\times(1+3+5+7)+1.01\times(11+13+15+17+19)$

$=1.1\times16+1.01\times75$

$=17.6+75.75$

$=93.35$.

【例 2】 计算 $0.\underbrace{00\cdots00}_{963个0}181\times0.\underbrace{000\cdots0}_{1028个0}11$.（视频）

解：两个小数相乘，小数点后的位数是两个小数各自的位数之和.

$181\times11=1991$，

又因两个小数的小数点后分别有 $963+3=966$（位）和 $1028+2=1030$

（位），1991 占 4 位，小数点后有 1030+966−4=1992（个）0.

所以，

原式$=0.\underbrace{00\cdots00}_{1992个0}1991$.

【例 3】 计算 $(44332-443.32)\div(88664-886.64)$.

分析：本题中每个小括号内的被减数是减数的 100 倍，并且两个被减数之间及两个减数之间都是 2 倍关系．因此，可以用乘法分配律来简算.

解：$(44332-443.32)\div(88664-886.64)$.

$=(44332-443.32)\div[(44332-443.32)\times 2]$

$=(44332-443.32)\div(44332-443.32)\div 2$

$=1\div 2$

$=0.5$.

【例 4】 计算 $\underbrace{0.625\times0.625\times\cdots\times0.625}_{10个0.625}\times\underbrace{8\times8\times\cdots\times8}_{9个8}\times\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{8个2}$.（视频）

分析：$0.625\times8=5$，$2\times5=10$.

9 个 0.625 与 9 个 8 相乘,得到 9 个 5,8 个 5 与 8 个 2 相乘,得到 8 个 10. 剩余的数再相乘即可.

解：原式$=0.625\times5\times\underbrace{10\times10\times\cdots\times10}_{8个10}$

$=312500000$.

【例 5】 如果 $0.27\times1.5+\square\times1.5+1.5\times0.32=0.77\times1.5$，求□等于多少？（视频）

解：等式左边可以理解成 0.27 个 1.5 加 0.32 个 1.5 加□个 1.5 等于 0.77 个 1.5，即$\square=0.77-0.27-0.32=0.18$.

所以，□等于 0.18.

【例 6】 计算：

$1+0.99-0.98-0.97+0.96+0.95-0.94-0.93+\cdots+0.04+0.03-0.02-0.01$.（视频）

分析：式子里的数是从 1 开始，依次减少 0.01，直到最后一个数是 0.01，因此，式中共有 100 个数. 而式子中的运算都是两个数相加接着减两个数，再加两个数，再减两个数，…按这样的顺序排列的.

由于数的排列、运算的排列都很有规律，按照规律可以考虑每 4 个数为一组添上括号，每组数的运算结果也有一定的规律. 可以看到把每组数中第 1 个数减第 3 个数，第 2 个数减第 4 个数，各得 0.02，合起来是 0.04，那么，

每组数（即每个括号）运算的结果都是 0.04，整个算式中的 100 个数正好分成 25 组，它的结果就是 25 个 0.04 的和.

解：方法 1：$1+0.99-0.98-0.97+0.96+0.95-0.94-0.93+\cdots+0.04+0.03-0.02-0.01$

$=(1+0.99-0.98-0.97)+(0.96+0.95-0.94-0.93)+\cdots+(0.04+0.03-0.02-0.01)$

$=0.04\times 25$

$=1.$

方法 2：$1+0.99-0.98-0.97+0.96+0.95-0.94-0.93+\cdots+0.04+0.03-0.02-0.01$

$=1+(0.99-0.98-0.97+0.96)+(0.95-0.94-0.93+0.92)+\cdots+(0.03-0.02-0.01)$

$=1.$

难题精讲

在一张纸条上写有 20 个 1.6 和 18 个 1.13，画去其中的一些数，使还留着的数的和为 20.05，应当画去多少个 1.6 和多少个 1.13？（**视频**）

分析：题目问的是应当画去多少个 1.6 和多少个 1.13，要直接求出这个问题的解不好算. 反过来，求多少个 1.6 和多少个 1.13 的和是 20.05，比较容易算.

解：20.05 有两位小数，要乘得的数百分位上是 5，只能在 18 个 1.13 中选 5 个或 15 个求和，$1.13\times5=5.65$，$20.05-5.65=14.4$，$14.4=1.6\times9$，即留下 9 个 1.6 和 5 个 1.13，它们的和是 20.05，应当画去 1.6 的个数是 $20-9=11$（个），应当画去 1.13 的个数是 $18-5=13$（个）.

再看选 15 个 1.13 求和的情况. $15\times1.13=16.95$，$20.05-16.95=3.1$，不能找到若干个 1.6 的和为 3.1.

因此，应当画去 11 个 1.6 和 13 个 1.13 是唯一的解.

答：应当画去 11 个 1.6 和 13 个 1.13.

同步练习

1. 计算：（1）$172.4\times6.2+2724\times0.38$；

（2）$6.25\times0.16+264\times0.0625+5.2\times6.25$；

（3）$1.2\div0.125\times0.5\div4.8$.

2. 计算$(199.9+19.99+1.999+0.1999)\div 0.1111$.

3. 计算 $1999+199.9+19.99+1.999+0.1999$.（视频）

4. 在□里填上适当的数，使下面的等式成立.

$73.06-[\square\times(4.465+5.535)+42.06]=3$.

5. 下面算式并不成立，但只要移动其中一个数的小数点的位置，就可以使等式成立，请你把改动后的算式写出来.

$[4.2\times 5-(1\div 2.5+9.1\div 0.7)]\div 0.04=100$.

6. 计算 $(3.6\times 0.75\times 1.2)\div(1.5\times 24\times 0.18)$.

7. 计算 $12.34+23.45+34.56+45.67+56.78+67.89+78.91+89.12+91.23$.

8. 计算 $0.1+0.2+0.3+\cdots+0.8+0.9+0.10+0.11+0.12+\cdots+0.19+0.20$.

9. 如果把 0.00000000025 简记为 $\underbrace{0.000\cdots0}_{10个0}25$.下面有两个数:

$a=\underbrace{0.00\cdots0}_{1984个0}125,\quad b=\underbrace{0.00\cdots0}_{1988个0}8,$

试求：$a+b$, $a-b$, $a\times b$, $a\div b$.（视频）

同步练习参考答案

1.（1）原式$=1724\times 0.62+(1724+1000)\times 0.38$

$=1724\times 0.62+1724\times 0.38+380$

$=1724\times(0.62+0.38)+380$

$=1724+380$

$=2104$.

（2）原式$=6.25\times 0.16+2.64\times 6.25+5.2\times 6.25$

$=6.25\times(0.16+2.64+5.2)$

$=6.25\times 8$

$=50$.

（3）原式$=1.2\times 0.5\div 0.125\div 4.8$

$=0.6\times 2\times 0.5\div(0.125\times 4.8)$

$=0.6\times 1\div(0.125\times 8\times 0.6)$

$=0.6\div(1\times 0.6)$

$=1$.

2. 原式=$(1999\times0.1+1999\times0.01+1999\times0.001+1999\times0.0001)\div0.1111$

$=1999\times0.1111\div0.1111$

$=1999.$

3. 原式=$2000-1+200-0.1+20-0.01+2-0.001+0.2-0.0001$

$=2222.2-1.1111$

$=2221.0889.$

4. $73.06-70.06=3$，所以，中括号部分等于 70.06，即

$\square\times(4.465+5.535)+42.06=70.06$，

$\square\times(4.465+5.535)+42.06=\square\times10+42.06=70.06$,

$\square\times10=28$，　$\square=2.8.$

5. 将 $1\div2.5$ 改为 $10\div2.5$ 或 $1\div0.25$ 即可.

即$[4.2\times5-(10\div2.5+9.1\div0.7)]\div0.04=100$，

或$[4.2\times5-(1\div0.25+9.1\div0.7)]\div0.04=100.$

6. 原式=$(3.6\div0.18)\times(0.75\div1.5)\times(1.2\div24)$

$=20\times0.5\times0.05$

$=0.5.$

7．9 个加数中，十位、个位、十分位、百分位的数都是 1~9，

所以，原式=$11.11\times(1+2+\cdots+9)$

$=11.11\times45$

$=499.95.$

8. 这个算式的数的排列像一个等差数列，但仔细观察，它实际上由两个等差数列组成，$0.1+0.2+0.3+\cdots+0.8+0.9$ 是第一个等差数列，后面每一个数都比前一个数多 0.1，而 $0.10+0.11+0.12+\cdots+0.19+0.20$ 是第二个等差数列，后面每一个数都比前一个数多 0.01，所以，应分为两段按等差数列求和的方法来计算.

$0.1+0.2+0.3+\cdots+0.8+0.9+0.10+0.11+0.12+\cdots+0.19+0.20$

$=(0.1+0.9)\times9\div2+(0.10+0.20)\times11\div2$

$=4.5+1.65$

$=6.15.$

9. a 在小数点后有 1986 位，b 在小数点后有 1988 位，故在计算 $a+b$ 时，b 的数字 8 应与 a 的数字 5 后面的两位对齐.

$\therefore\ a+b=\underbrace{0.00\cdots0}_{1984个0}12508$，

$a-b=\underbrace{0.00\cdots0}_{1984个0}12492$，

又因为 $125\times8=1000$，而 $a\times b$ 应在小数点后有 1986+1988=3974（位），即小数点后有 3974−4=3970（个）0.

$\therefore a\times b=\underbrace{0.00\cdots0}_{3971个0}1$.

在计算 $a\div b$ 时，可以同时把 a 与 b 的小数点向右移动 1988 位，即

$a\div b=12500\div8=1562.5$.

第 7 讲　周长与面积

知识要点

（1）三角形的面积计算公式　$S=$ 底 $\times$ 高 $\div 2$

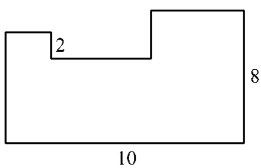
（2）梯形的面积计算公式　$S=$(上底 + 下底) $\times$ 高 $\div 2$

（3）同底等高的三角形面积相等.

（4）等底同高的三角形面积相等.

经典题再现

求下面图形的周长.（单位：厘米）.（**视频**）



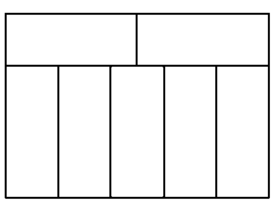
解：周长 $=(10+8)\times2+2\times2$

$=18\times2+4$

$=40$（厘米）.

典型例题

【例 1】 把 7 个完全相同的小长方形组成如下图所示的一个大长方形．已知每个小长方形的长是 5 厘米，那么拼成的大长方形的周长是多少厘米？（**视频**）



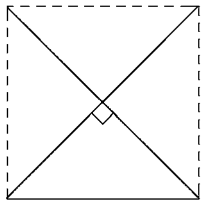
解：小长方形的宽 $=5\times2\div5=2$（厘米）.

大长方形的周长 $=[5\times2+(2+5)]\times2=34$（厘米）.

【例 2】一个等腰直角三角形，最长的边 12 厘米，这个三角形的面积是多少平方厘米？（**视频**）

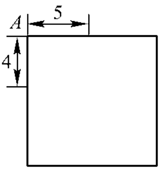
解：如下图所示，4 个这样的等腰直角三角形可以拼成一个边长为 12 厘米的正方形，即正方形面积等于等腰直角三角形的面积的 4 倍，所以这个三角形的面积是

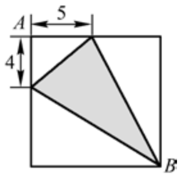
$12\times12\div4=36$（平方厘米）.



答：这个三角形的面积是 36 平方厘米.

【例 3】 如下左图所示，一个边长为 10 米的正方形，在两条边上各有一个点，它们与顶点 A 分别相距 4 米和 5 米．请在另外两条边上选一点，将它与原有两点连成一个三角形，问此三角形的最大面积是多少平方米？（**视频**）



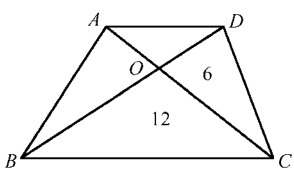


解：如上右图所示，所找点为 B 点，此时三角形的面积为

$10\times10-4\times5\div2-5\times10\div2-(10-4)\times10\div2=35$（平方米）.

答：此三角形的最大面积是 35 平方米.

【例 4】 梯形 $ABCD$ 的两条对角线 AC, BD 把梯形分成四个三角形，已知三角形 DOC 和三角形 BOC 的面积分别是 6 平方米和 12 平方米，问三角形 AOB 和三角形 AOD 的面积各是多少？（**视频**）



解：三角形 AOB 的面积 = 三角形 COD 的面积 =6（平方米）.

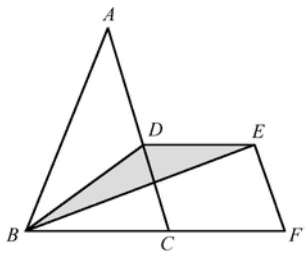
另外，三角形 BOC 的面积 = 2× 三角形 COD 的面积，且高相等，所以，$BO=2\times OD$.

三角形 AOB 的面积 =2× 三角形 AOD 的面积=6（平方米），

三角形 AOD 的面积 =3（平方米）.

答：所求两个三角形的面积分别为 6 平方米和 3 平方米.

【例 5】 如下图所示，阴影部分的面积是 54 平方厘米，三角形 ABC 是平行四边形 $CDEF$ 的面积的 3 倍，求三角形 ABC 的面积.（**视频**）



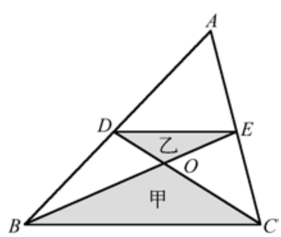
解：因为三角形 BDE 与平行四边形 $CDEF$ 同底等高，所以 $CDEF$ 的面积是 BDE 面积的 2 倍，三角形 ABC 的面积又是 $CDEF$ 的面积的 3 倍，

所以三角形 ABC 的面积是三角形 BDE 的 6 倍.

三角形 ABC 的面积为 $54\times 6=324$（平方厘米）.

答：三角形 ABC 的面积为 324 平方厘米.

【例 6】 如下图所示，在三角形 ABC 中，D,E 分别是 AB 和 AC 的中点，且甲的面积减去乙的面积等于 5 平方厘米，求三角形 ABC 的面积.（**视频**）



解：甲的面积 − 乙的面积 =5（平方厘米）.

(甲的面积＋三角形 COE 面积)−(乙的面积＋三角形 COE 面积)=5（平方厘米）.

三角形 BCE 面积 − 三角形 DCE 面积 =5（平方厘米）.

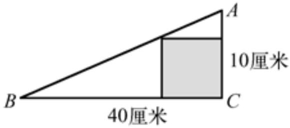
三角形 ABC 的面积 $\div 2-$ 三角形 ABC 的面积 $\div 4=5$（平方厘米）.

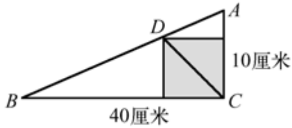
三角形 ABC 的面积 $\div 4=5$（平方厘米），则三角形 ABC 的面积 $=5\times 4=20$（平方厘米）.

答：三角形 ABC 的面积为 20 平方厘米.

难题精讲

如下左图所示，$AC=10$ 厘米，$BC=40$ 厘米，阴影部分是正方形．求阴影部分的面积.（**视频**）





分析：连接 CD，则三角形 ACD 和三角形 BCD 的高相等，都是正方形的边长.

三部分面积之和是三角形 ABC 的面积.

解：$10\times$ 边长 $\div 2+40\times$ 边长 $\div 2=$ 三角形 ABC 的面积，即

$5\times$ 边长 $+20\times$ 边长 $=10\times 40\div 2$，

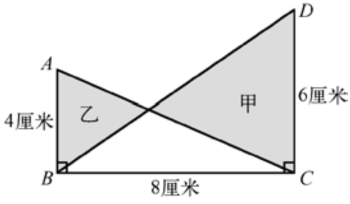
$25\times$ 边长 $=200$（厘米），边长 $=8$（厘米），

正方形面积 $=8\times 8=64$（平方厘米）.

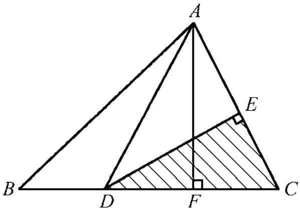
即阴影部分的面积为 64 平方厘米.

同步练习

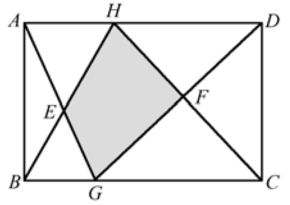
1．下图中甲三角形的面积比乙三角形的面积大多少平方厘米?（**视频**）



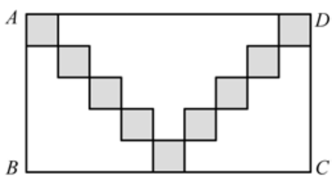
2．如下图所示，$BC=3BD$，DE 和 AC 垂直，AF 和 BC 垂直，三角形 ABC 的面积为 48 平方厘米，$AE=11$ 厘米，$AC=16$ 厘米．求三角形 DCE 的面积.



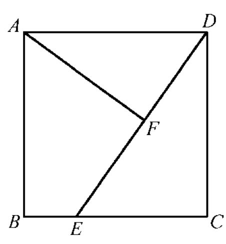
3．下图中 $ABCD$ 是长方形，三角形 ABE 的面积是 20 平方厘米，三角形 CDF 的面积是 40 平方厘米．求阴影部分的面积．



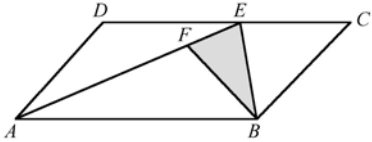
4．如下图所示，在长方形 $ABCD$ 中，每个小正方形的边长为 2 厘米．求长方形 $ABCD$ 的周长．



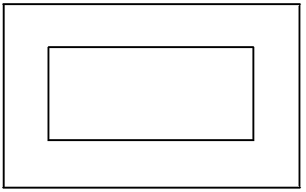
5．如下图所示，正方形 $ABCD$ 的边长是 4 厘米，DE 长 5 厘米，AF 垂直于 DE．问 AF 的长度是多少厘米？



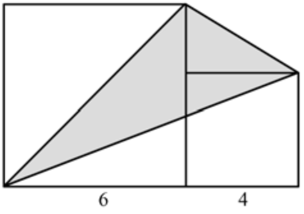
6．如下图所示，$ABCD$ 是一个平行四边形，面积为 100 平方厘米．若 $AF=4FE$，则三角形 BEF 的面积为________平方厘米．



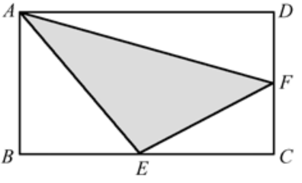
7．大小两个长方形摆成如下图所示的形状，小长方形的长是宽的 2 倍．如果大小两个长方形对应边之间的距离是 1 厘米，夹在大小两个长方形之间那部分图形的面积是 40 平方厘米，那么大小长方形的面积各是多少平方厘米?（**视频**）



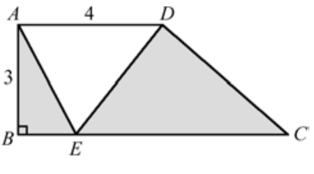
8．下图中两个正方形的边长分别是 6 厘米和 4 厘米．求阴影部分的面积．



9．如下图所示，长方形 $ABCD$ 的面积是 16 平方厘米，E,F 都是所在边的中点．求 AEF 的面积．



10．如下图所示，$ABCD$ 是直角梯形，$BC = 6$．求阴影部分的面积和．（单位：厘米）



同步练习参考答案

1．三角形 BCD 的面积–三角形 ABC 的面积=三角形甲的面积–三角形乙的面积，而三角形 BCD 与三角形 ABC 的面积是可以计算的．

$6\times8\div2-4\times8\div2=8$（平方厘米）．

2．三角形 ADC 的面积 $=48\div3\times2=32$（平方厘米），如果以 AC 为底，DE 为高，则 $32=16\times DE\div2=8\times DE$，$DE=4$ 厘米．

三角形 DEC 的面积 $=4\times(16-11)\div2=10$（平方厘米）．

3．三角形 BCH 的面积是长方形面积的一半，三角形 ABG 与 CDG 的面积之和也是长方形面积的一半．除去它们的公共部分：三角形 BEG 和三角形 CFG，剩余部分面积相等，即阴影面积等于 $20+40=60$（平方厘米）．

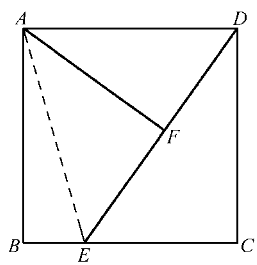
4．长方形的长 $=2\times9=18$（厘米）．

长方形的宽 $=2\times5=10$（厘米）．

长方形的周长 $=(18+10)\times2=56$（厘米）．

5．如下图所示，三角形 ADE 的面积 = 正方形面积的一半 $=4\times4\div2=8$（平方厘米）．

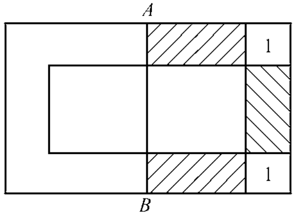
$AF=8\times2\div5=3.2$（厘米）．



6．三角形 ABE 的面积 $=100\div2=50$（平方厘米）．

三角形 BEF 的面积 = 三角形 ABE 的面积 $\div5=50\div5=10$（平方厘米）．

7．如下图所示，用线段 AB 把大小两个长方形分成完全一样的两部分．这样一来由于小长方形的长是宽的 2 倍，所以小长方形就被分成了两个正方形，也就有图中的三个阴影部分的长方形面积相等．从而可求出小长方形的宽，进而求出小长方形的面积和大长方形的面积．



$(40 \div 2 - 1 \times 1 \times 2) \div 3 \div 1 = 6$（厘米），

小长方形的面积为$(6 \times 2) \times 6 = 72$（平方厘米），

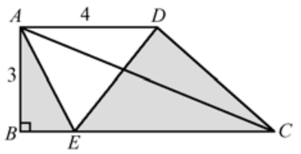
大长方形的面积为$(6 \times 2 + 2) \times (6 + 2) = 112$（平方厘米）.

8．$6 \times 6 \div 2 + (4 + 6) \times 4 \div 2 - (6 + 4) \times 4 \div 2 = 18$（平方厘米）.

9．$16 \div 4 = 4$（平方厘米），$4 \div 2 = 2$（平方厘米）.

$16 - 4 - 4 - 2 = 6$（平方厘米）.

10．如下图所示，连接 AC．由于同底等高的两个三角形面积相等，即三角形 AEC 的面积等于三角形 DEC 的面积.



这样阴影部分的面积就等于直角三角形 ABC 的面积.

$6 \times 3 \div 2 = 9$（平方厘米）.

即阴影部分的面积是 9 平方厘米.

第 8 讲 奇数与偶数

知识要点

如果将自然数由小到大排成一列：

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,…

我们可以把这些数分成两大类，即能被 2 整除的称为偶数，不能被 2 整除的称为奇数.

特别注意：（1）因为 0 能被 2 整除，所以 0 是偶数.

（2）自然数是按一奇一偶顺序排列的．两个连续的自然数必定是一奇一偶.

奇数与偶数的运算性质：

性质 1　**偶数±偶数＝偶数**

奇数±奇数＝偶数

奇数±偶数＝奇数

说明：（1）一个数在与奇数进行加减运算时，必会改变其奇偶性.

（2）一个数在与偶数进行加减运算时，必会保持其奇偶性.

性质 2　**奇数个奇数的和是奇数；**

偶数个奇数的和是偶数；

任意多个偶数的和总是偶数.

性质 3　**偶数×偶数＝偶数**

奇数×奇数＝奇数

奇数×偶数＝偶数

说明：（1）任何一个数乘以偶数都得偶数.

（2）只有奇数乘以奇数时，才得奇数.

性质 4　**奇数的连乘积永远是奇数.**

性质 5　**若干个整数连乘，如果其中有一个数是偶数，那么乘积是偶数.**

本讲我们使用奇偶分析法，即通过对某个量奇偶性的分析，达到解决问题的目的.

经典题再现

两个自然数的差乘以它们的积，能否得到数 99099?（**视频**）

解：对任意两个数 a 和 $b(a>b)$：

① 如果 a,b 都是奇数，那么 $a-b$ 是偶数．从而 $a\times b\times(a-b)$是偶数，而 99099 是奇数，所以 $a\times b\times(a-b)$不可能等于 99099；

② 如果 a,b 至少有一个是偶数，那么 $a\times b\times(a-b)$是偶数，也不可能等于 99099；

综合①、②可知，两个自然数的差乘以它们的积不能得到数 99099.

典型例题

【例 1】 小王买了一本共有 99 张纸的练习本，小王依次将练习本的各面编号，即由第一面一直编到第 198 面．小王从该练习本中撕下其中 25 张纸，并将写在它们上面 50 个编号相加，试问：小王所加得的和数能否为 2000?（**视频**）

解：不能.

由于每一张纸上的两个数都是两个连续的自然数，其和必为奇数．25 张纸上的 50 个编号之和就是 25 个奇数之和，所以，其和必为奇数，故不可能为 2000.

答：小王所加得的和数不能为 2000.

【例 2】 在 1,2,3,⋯,2000,2001 每个数的前面任意添加一个加号或减号，将这 2001 个数连起来构成一个算式，问这个算式的结果是奇数还是偶数?（**视频**）

解：因为两个整数的和与差的奇偶性是相同的，所以不论加减号如何添加，得到的算式的奇偶性都与 $1+2+3+\cdots+2000+2001$ 的奇偶性相同．因为

$1+2+3+\cdots+2000+2001$

$=$(1000 个偶数的和)$+$(1001 个奇数的和)

$=$ 奇数.

答：所构成的算式的结果是奇数.

【例 3】 3 个相邻的偶数相乘，乘积是一个五位数 4□□□2，请把中间的 3 个数填出来.（**视频**）

解：因为已知的乘积是五位数，所以相邻的 3 个偶数都是两位数.

① 相邻的偶数相差 2，偶数的末位数字只能是 0,2,4,6,8．相邻的 3 个偶数的末位只能是 0,2,4 或 2,4,6 或 4,6,8 或 6,8,0 或 8,0,2 这 5 种情形．因为本题的 3 个相邻偶数的乘积的末位数是 2，在上面的 5 种情况中，只有第三种 $4\times6\times8$ 的末位数是 2，所以相邻的 3 个偶数的末位数依次是 4,6,8．

② 为确定十位上的数字，可以大致估计一下，由于 $30\times30\times30=27000$，$40\times40\times40=64000$，又因为本题给出的乘积是一个五位数 4□□□2，它在 27000 和 64000 之间，所以这 3 个相邻偶数在 30 与 40 之间，结合①中的分析结果：3 个偶数的末位数字是 4,6,8，因此 3 个相邻的偶数是 34,36,38．而 $34\times36\times38=46512$．

所以中间的 3 个数字是 6,5,1．

【例 4】 下图是一所房子的示意图，数字表示房间号码，每一个房间都与隔壁房间有门相通．小华想从 1 号房间出发，不能重复地走遍 9 个房间，又回到 1 号房间．他能做到吗?（**视频**）

1	2	3
4	5	6
7	8	9

解：小华从 1 号房间出发，因为 1 是奇数，与 1 号相邻的房间的号码都是偶数，所以第一次必然进入偶数号房间；又由于与偶数号房间相邻的房间的号码都是奇数，所以第二次肯定进入奇数号房间．完全类似，第三次进入偶数号房间，第四次进入奇数号房间，…，走奇数步时到达偶数号房间，走偶数步时到达奇数号房间，走完 9 个房间时，用了 8 步恰好在奇数号房间，与 1 号房间不相邻，所以不重复地走遍 9 个房间，不能回到 1 号房间．

答：他做不到．

【例 5】 有 4 个不同的自然数，它们中任意 2 个数的和是 2 的倍数，任意 3 个数的积是 3 的倍数，为了使得这 4 个数的和尽可能小，这 4 个数分别是多少?（**视频**）

解：任意 2 个数的和是偶数，说明 4 个数全是偶数或全是奇数．

我们选 3 个最小的偶数 2,4,6，这 3 个数中 6 是 3 的倍数．再添一个偶数必须是 3 的倍数，否则与 2,4 在一起没有 3 的倍数．所以 4 个数如果是偶数，则是 2,4,6,12．

如果 4 个数是奇数，则是 1,3,5,9.

$2+4+6+12=24$，$1+3+5+9=18$，所以选 1,3,5,9.

答：这 4 个数是 1,3,5,9.

【例 6】 有 98 个孩子，每人胸前有一个号码，号码从 1 到 98 各不相同．试问：能否将这些孩子排成若干排，使每排中都有一个孩子的号码数等于同排中其余孩子号码数的和？并说明理由．（**视频**）

解：不能．

如果可以按要求排成每排中都有一个孩子的号码数等于同排中其余孩子号码数的和，那么每一排中各号码数之和都是某一个孩子号码数的 2 倍，是个偶数．所以这 98 个号码数的总和是个偶数，但是这 98 个数的总和为 $1+2+\cdots+98=99\times49$，是个奇数，矛盾！所以不能按要求排成．

难题精讲

桌上放有 77 枚正面朝下的硬币，第 1 次翻动 77 枚，第 2 次翻动其中的 76 枚，第 3 次翻动其中的 75 枚，…，第 77 次翻动其中的 1 枚．按这样的方法翻动硬币，能否使桌上所有的 77 枚硬币都正面朝上？说明你的理由．（**视频**）

解：对每一枚硬币来说，只要翻动奇数次，就可使原先朝下的一面朝上．这一事实，对我们解决这个问题起着关键性作用．

按规定的翻动，共翻动 $1+2+\cdots+77=77\times39$（次），平均每枚硬币翻动了 39 次，这是奇数．因此，对每一枚硬币来说，都可以使原先朝下的一面翻朝上．

$77\times39=77+(76+1)+(75+2)+\cdots+(39+38)$，

根据规定，可以设计如下的翻动方法：

第 1 次翻动 77 枚，可以将每枚硬币都翻动一次；第 2 次与第 77 次共翻动 77 枚，又可将每枚硬币都翻动一次；同理，第 3 次与第 76 次，第 4 次与第 75 次，…，第 39 次与第 40 次都可将每枚硬币各翻动一次．这样每枚硬币都翻动了 39 次，都由正面朝下变为正面朝上．

同步练习

1．小于 1880 的自然数中，所有偶数之积与所有奇数之积的个位数字之

和是多少?

2．任意取出 1986 个连续自然数，它们的总和是奇数还是偶数？

3．连续 70 个自然数的和是 6335，这 70 个自然数中的所有奇数之和是多少?（视频）

4．能否在下面的□内填入加号或减号，使得等式成立？为什么？

$$1\square 2\square 3\square 4\square 5\square 6\square 7\square 8\square 9=10.$$

5．有一列数：

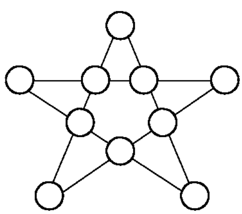
1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,…从第三个数开始，每个数都是前两个数的和．那么在前 1000 个数中，有多少个奇数?

6．假设标有 A、B、C、D、E、F、G 的 7 盏灯顺次排成一行，每盏灯安装一个开关．现在 A、C、D、G 这 4 盏灯亮着，其余 3 盏灯没亮．小华从灯 A 开始顺次拉动开关，即从 A 到 G，再从 A 开始顺次拉动开关，他这样拉动了 999 次开关后，哪些灯亮着，哪些灯没亮?

7．现有足够多的苹果、梨、橘子 3 种水果，最少要分成多少堆（每堆都有苹果、梨和橘子 3 种水果），才能保证找得到这样的两堆，把这两堆合并后这 3 种水果的个数都是偶数．

8．某市五年级 99 名同学参加数学竞赛，竞赛题共 30 道，评分标准是基础分 15 分，答对一道加 5 分，不答加 1 分，答错一道倒扣 1 分．问所有参赛同学得分总和是奇数还是偶数？

9．如下图所示，把图中的圆圈任意涂上红色或蓝色．问有无可能使得在同一条直线上的红圈数都是奇数？请说明理由．



同步练习参考答案

1．偶数有 2,4,6,8,10,…乘积的个位数是 0．

奇数有 1,3,5,7,9,11,…乘积中有 5，且没有 2，所以个位数为 5．

和是 $5+0=5$.

2．连续的自然数都是按一奇一偶或一偶一奇排列，即是奇偶相间的.

1986 个数，可以是奇偶成对，所以，这些数一定是 $1986\div2=993$（个）奇数，993 个偶数.

993 个偶数相加还是偶数，993 个奇数相加是奇数．总和一定是奇数.

3．

方法 1：$1+2+3+\cdots+70=2485$，

$6335-2485=3850$，　$3850\div70=55$.

给每个数都增加 55，和增加 3850，成为 6335.

70 个数的和是 $56+57+\cdots+125=6335$.

这里有 35 个奇数，35 个偶数．给每个偶数加 1，则成为所有奇数和的 2 倍.

所以，$(6335+35)\div2=3185$.

方法 2：设最小数为 x，则有

$x+x+1+x+2+\cdots+x+69=6335$.

$70x+2415=6335$，$x=56$.

70 个数的和是 $56+57+\cdots+125=6335$.

后面与方法 1 相同.

4．由于任意两个自然数的和或差具有相同的奇偶性，如 $5+3=8$ 是偶数，$5-3=2$ 是偶数．$1+2+3+\cdots+9=45$ 是奇数，而 10 是偶数，所以不可能.

5．这列数的奇偶性依次为奇、奇、偶，奇、奇、偶，奇、奇、偶，…每 3 个数为一组，前两个为奇数，后一个为偶数．$1000\div3=333\cdots\cdots1$，可知这 1000 个数中有偶数 333 个，那么奇数应有 $1000-333=667$（个）.

6．一盏灯的开关被拉动奇数次后，将改变原来的状态，即亮的变成熄的，熄的变成亮的；而一盏灯的开关被拉动偶数次后，不改变原来的状态.

由于 $999=7\times142+5$，

因此，灯 A、B、C、D、E 各被拉动 143 次开关，灯 F、G 各被拉动 142 次开关．所以，当小华拉动 999 次后，B、E、G 亮，而 A、C、D、F 熄.

7．当每堆都含有 3 种水果时，3 种水果的奇偶情况见下表：

苹果	奇	奇	奇	奇	偶	偶	偶	偶
橘子	奇	偶	偶	奇	偶	奇	偶	奇
梨	奇	偶	奇	偶	偶	奇	奇	偶

可见，3 种水果的奇偶情况共有 8 种可能，所以必须最少分成 9 堆，才能保证有两堆的 3 种水果的奇偶性完全相同，把这两堆合并后这 3 种水果的个数都是偶数．

8．对每个参赛同学来说，每题都答对共可得 165 分，是奇数．如答错一题，就要从 165 分中减去 6 分，不管错几道，6 的倍数都是偶数，165 减去偶数，差还是奇数．同样道理，如有一题不答，就要减去 4 分，并且不管有几道题不答，4 的倍数都是偶数，因此，从总分中减去的仍是偶数，所以每个同学的得分为奇数．而奇数个奇数之和仍为奇数，故 99 名同学得分总和一定是奇数．

9．不可能．

如果每条直线上的红圈数都是奇数，而五角星有 5 条边，奇数个奇数之和为奇数，那么 5 条线上的红圈共有奇数个（包括重复的）．从另一个角度看，由于每个圆圈是两条直线的交点，则每个圆圈都要计算两次，因此，每个红圈也都算了两次，总个数应为偶数，矛盾．所以，不可能使得在同一条直线上的红圈数都是奇数．

第 9 讲　应用题解法（一）

知识要点

小学阶段应用题主要有算术解法和方程解法.

算术解法直接寻找数量关系列算式，必要时画线段图辅助，以弄清关系.

列方程解应用题是用字母来代替未知数，根据等量关系列出含有未知数的等式，也就是列出方程，然后解出未知数的值．列方程解应用题的优点在于可以使未知数直接参加运算．解这类应用题的关键在于能够正确地设立未知数，找出等量关系从而建立方程．而找出等量关系又在于熟练运用数量之间的各种已知条件．掌握了这两点就能正确地列出方程.

列方程解应用题的一般步骤是：

1．弄清题意，找出已知条件和所求问题；

2．依题意确定等量关系，设未知数 x；

3．根据等量关系列出方程；

4．解方程.

经典题再现

甲、乙两个农妇卖鸡蛋，甲的鸡蛋比乙多 10 个，可是全部卖出后的收入都是 15 元．如果甲的鸡蛋按乙的价格出售，可卖 18 元．问甲、乙一共有多少个鸡蛋？**（视频）**

解：如果甲与乙有同样多的鸡蛋数，按乙的价格也可卖 15 元，可知乙的鸡蛋的价格为$(18-15)\div 10=0.3$（元），

乙有鸡蛋 $15\div 0.3=50$（个），

甲、乙共有鸡蛋 $50\times 2+10=110$（个）.

答：甲、乙共有鸡蛋 110 个.

典型例题

【例 1】 甲、乙两工人生产同样的零件，原计划每天共生产 700 个．由于改进技术，甲每天多生产 100 个，乙的日产量提高 1 倍，这样两人一天共生产 1020 个．甲、乙原计划每天各生产多少个零件？（**视频**）

解：甲、乙共多生产 $1020-700=320$（个），这些零件中，有 100 个是甲多生产的．

$320-100=220$（个）．这是乙多生产的，且是乙日产量的 1 倍．

所以原计划乙每天生产 220 个，

甲每天生产 $700-220=480$（个）．

答：原计划甲每天生产 480 个，乙每天生产 220 个．

【例 2】 鸡、兔若干共有脚 46 只，若将鸡与兔的数目互换，则脚变为 38 只，那么实际有鸡、兔共多少只？（**视频**）

解：下面第一行是原来的鸡和兔，第二行是对换后的．

鸡 鸡 鸡…鸡　　　　兔 兔…兔

兔 兔 兔…兔　　　　鸡 鸡…鸡

竖着看，正好鸡、兔成对．

上面一排共 46 只脚，下面一排共 38 只脚，两排共 $46+38=84$（只）脚．

一对共 6 只脚，$84\div6=14$（对），即一排共有鸡、兔 14 只．

答：实际有鸡、兔共 14 只．

【例 3】 巧克力每盒 9 块，软糖每盒 11 块．要把巧克力和糖分发给一些小朋友，每人每样一块．由于又来了一位小朋友，软糖就要增加一盒，两样发的盒数就一样多．现在又来了一位小朋友，巧克力还要增加一盒．问最后共有多少位小朋友（原来小朋友的人数不超过 50 人）？（**视频**）

解：没有增加小朋友时，软糖全部发完，所以原来小朋友的人数是 11 的倍数；又来了一位小朋友时，巧克力全部发完，所以原来小朋友的人数加 1 是 9 的倍数．而 44 是满足此条件的最小数，且满足原来软糖比巧克力少一盒的条件．

因此，原来有 44 位，最后有 46 位小朋友．

答：最后有 46 位小朋友．

【例 4】 一瓶橘汁，连瓶重 250 克，喝完一半橘汁后，连瓶还有 145 克，

问瓶中有橘汁多少克？瓶重多少克？（**视频**）

解：设瓶中有橘汁 x 克，则瓶重（$250-x$）克.

$250-0.5x=145$，

解得 $x=210$，$250-210=40$（克）.

答：瓶中有橘汁 210 克，瓶重 40 克.

【例 5】 甲、乙、丙 3 种练习本每本价钱分别为 7 角、3 角、2 角．3 种练习本一共买了 47 本，付了 21 元 2 角，买乙种练习本的本数是丙种练习本的两倍．3 种练习本各买了多少本?（**视频**）

解：设丙种练习本买了 x 本，

则乙种练习本买了 $2x$ 本，甲种练习本买了（$47-x-2x$）本.

列方程 $2x+3\times 2x+7\times(47-x-2x)=212$，

解得 $x=9$，

$2x=2\times 9=18$（本），$47-x-2x=47-9-18=20$（本）.

答：甲种练习本买了 20 本，乙种练习本买了 18 本，丙种练习本买了 9 本.

【例 6】 爷爷今年 78 岁，3 个孙子的年龄分别是 27 岁、23 岁、16 岁．经过几年后爷爷的年龄等于 3 个孙子的年龄的和?（**视频**）

解：设经过 x 年后爷爷的年龄等于 3 个孙子的年龄的和，这时爷爷 $78+x$ 岁，3 个孙子的年龄分别是 $27+x$ 岁，$23+x$ 岁，$16+x$ 岁.

列方程$(27+x)+(23+x)+(16+x)=78+x$

解得 $x=6$

答：6 年后爷爷的年龄等于 3 个孙子的年龄的和.

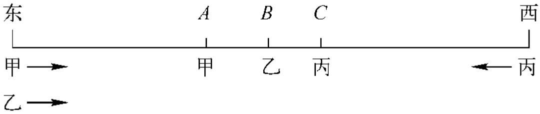
难题精讲

东、西两地相距 5400 千米，甲和乙从东地、丙从西地同时出发，相向而行．甲每分钟行 55 米，乙每分钟行 60 米，丙每分钟行 70 米．问多少分钟后乙正好走到甲、丙两人之间的中点?（**视频**）

分析：如果不设未知数，只运用速度和路程两个量，无法确定走到“正中间”这个时间.

而“正中间”正好说明两段路程相等.

列方程最主要的等量关系就有了.



解：设行了 x 分钟，甲行到 A 点，乙行到 A 至 C 的中点 B，丙行到 C 点．

AB 是乙比甲 x 分钟多走的路程，即$(60-55)x$ 米．

BC 是 $5400-60x-70x$．

$AB=BC$，

列方程$(60-55)x=5400-70x-60x$，

解得 $x=40$．

答：40 分钟后，乙正好走到甲、丙的正中间．

同步练习

1．参加数学兴趣小组的同学中，五年级比四年级的 3 倍少 35 人，两个年级的人数差是 41 人，问两个年级参加数学兴趣小组的各有多少人？

2．有两根绳子，第一根比第二根长 2 米，现在从第一根上剪下 4 米，往第二根上接上 10 米，这时第二根绳长是第一根的 2 倍．问原来两根绳子各是多少米？

3．张阿姨给幼儿园两个班的孩子分水果．大班每人分得 5 个橘子和 2 个苹果；小班每人分得 3 个橘子和 2 个苹果；张阿姨一共分出了 135 个橘子和 70 个苹果，那么小班有多少个孩子？

4．某杂志每期定价 2.5 元，全年共出 12 期．某班一些学生订半年，其余学生订全年，共需订费 1320 元；如果订全年的改订半年，而订半年的改订全年，共需订费 1245 元．问这个班共有多少名学生？

5．一艘远洋船上共有 28 名海员，船上的淡水可供全体船员用 40 天．轮船离港 10 天后在公海上救起 12 名遇难的外国海员，那么剩下的淡水可供船上的人再用多少天？

6．有大、中、小 3 筐苹果，小筐装的量是中筐的一半，中筐比大筐少装 16 千克，大筐装的量是小筐的 4 倍，这 3 筐苹果共多少千克？

7．4 个盒子共装了 45 个球，但是不知道每个盒子装多少个球．如果变动一下：第一个盒子减少 2 个球，第二个盒子增加 2 个球，第三个盒子增加一

倍，第四个盒子减少一半，那么这 4 个盒子的球数就一样多了．问原来装球最多的盒子装了多少个球？

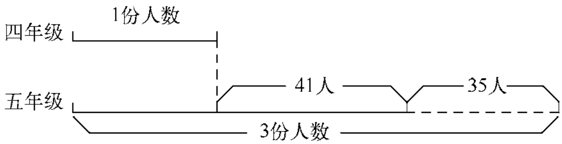
8．有两捆同样的通信电缆，在安装线路时，第一捆用去了 450 米，第二捆用去 950 米，这时第一捆余下的电缆刚好是第二捆余下电缆的 3 倍．问第一捆电缆原长多少米？

9．今年父亲的年龄是 48 岁，哥哥的年龄是弟弟的 2 倍，当弟弟长到哥哥现在的年龄时，父亲的年龄恰是兄弟俩年龄的和．那么今年哥哥多少岁？

10．东、西两镇相距 60 千米，甲骑车行完全程要 4 小时，乙骑车行完全程要 5 小时．现在两人同时出发从东镇到西镇，经过多少小时后乙剩下的路程是甲剩下路程的 4 倍？

同步练习参考答案

1．如下图所示：

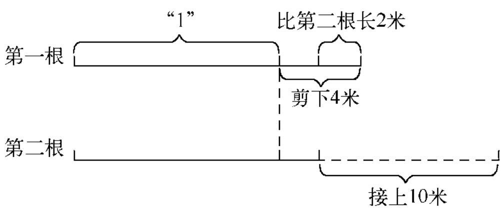


从图中可以看出，如果五年级增加 35 人，五年级就是四年级的 3 倍，此时两个年级的人数差是 $41+35=76$（人），

这样四年级的人数是 $76\div(3-1)=38$（人），

五年级的人数是 $38\times3-35=79$（人）．

2．如下图所示：



从图中可以看出，当第二根绳长是第一根的 2 倍时，第二根比第一根长 $4-2+10=12$（米），把此时第一根的长度看做“1”，从而求出第一根现在的绳

长为$(4-2+10)\div(2-1)=12$（米）.

所以原来第一根绳长为$12+4=16$（米）；第二根绳长$16-2=14$（米）.

3．由于大班和小班的每个孩子都分得了 2 个苹果，所以大班和小班共有$70\div2=35$（人）.

假设 35 人全是大班的，那么要分$35\times5=175$（个）橘子.

$175-135=40$（个）. 将一个大班换成小班，少分 2 个橘子，$40\div2=20$（人）.

所以，小班共 20 个学生.

4．$(1320+1245)\div(2.5\times6+2.5\times12)=57$.

这个班共有 57 名学生.

5．设每人每天用水 1 份. 共有水$28\times40=1120$（份）. 10 天后还剩$1120-28\times10=840$（份）.

$840\div(28+12)=21$（天）.

所以，剩下的淡水可供船上的人再用 21 天.

6．设小筐装x，则中筐装$2x$，大筐装$2x+16$，

列方程$2x+16=4x$，

解得$x=8$.

$8+16+32=56$（千克）.

即 3 筐苹果共有 56 千克.

7．设一样多时为x个，则第一个盒子有$x+2$，第二个盒子有$x-2$，第三个盒子有$0.5x$，第四个盒子有$2x$.

列方程$x+2+x-2+0.5x+2x=45$，

解得$x=10$.

最多的一盒有$2x=20$（个）.

8．设第一捆电缆原长x米，第一捆剩下$x-450$，第二捆剩下$x-950$.

列方程$x-450=3\times(x-950)$

解得$x=1200$（米）.

即第一捆电缆原长 1200 米.

9．设弟弟现在的年龄为x，则哥哥现在的年龄为$2x$. 当弟弟的年龄达到$2x$时，哥哥的年龄为$3x$. 又由题意知父亲那时的年龄将是$48+x$.

列方程$48+x=2x+3x$，

解得 $x=12$（岁）.

所以，哥哥今年是 $2x=24$（岁）.

10．设经过 x 小时.

甲速度为 $60\div4=15$（千米/小时），乙速度为 $60\div5=12$（千米/小时）.

列方程 $(60-15x)=4\times(60-12x)$，

解得 $x=3.75$ 小时.

即 3.75 小时后，乙剩下的路程是甲的 4 倍.

第 10 讲 尾数规律

知识要点

1．乘方运算：一个数与自身做若干次乘法运算，叫乘方运算．例如：

$2\times2\times2=2^3$，$3\times3\times3\times3=3^4$，$6\times6\times6\times6\times6=6^5$，

$1994^4=1994\times1994\times1994\times1994$．

2^2 我们读做 2 的 2 次方或 2 的平方，2^3 我们读做 2 的 3 次方，或 2 的立方；1994^4 我们读做 1994 的 4 次方．

2．尾数的循环规律：

$12^7=12\times12\times12\times\cdots\times12$，共 7 个 12 相乘．

1 个 12，尾数是 2；2 个 12 相乘，尾数是 4；3 个 12 相乘，尾数是 8；4 个 12 相乘，尾数是 6；5 个 12 相乘，尾数是 2；6 个 12 相乘，尾数是 4；7 个 12 相乘，尾数是 8．

即 12^7 的尾数为 8．

通过上面的例题，我们发现，在求乘方运算的尾数时，只需要将尾数相乘即可，与尾数之前的数没有关系．

另外，我们发现 2 的乘方尾数有循环规律：2,4,8,6,2,4,8,6,…，循环节长度是 4．

我们使用上面的方法，可以总结出下表：

一个数的尾数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
这个数的 2 次方的尾数	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
这个数的 3 次方的尾数	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
这个数的 4 次方的尾数	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
这个数的 5 次方的尾数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

续表

这个数的 6 次方的尾数	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
这个数的 7 次方的尾数	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
这个数的 8 次方的尾数	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
这个数的 9 次方的尾数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

我们竖着看上面的表，尾数是 0,1,5,6 的数，它的各个次方的尾数还是 0,1,5,6；尾数是 4,9 的，它的各个次方按 4,6,4,6…和 9,1,9,1…的规律循环；尾数是 2,3,7,8 的数，它的各个次方的尾数都按 4 个数一循环的规律.

经典题再现

自然数$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{67个2}-1$的个位数字是多少?（视频）

分析：原式可写成$2^{67}-1$. 先求出2^{67}的个位数字，然后个位数字再减 1 即可.

解：按照我们在知识要点中给出的尾数的循环规律，2 的乘方尾数按 2,4,8,6 循环．即循环节为 4.

$67\div4=16\cdots\cdots3$，即循环 16 次还余 3，而循环节中的第 3 个数为 8，所以，2^{67}的尾数为 8.

$2^{67}-1$ 的尾数为 7.

典型例题

【例 1】 求 $11\times22\times33\times\cdots\times1111$ 的尾数.（视频）

解：11,22,33,…,99,110,121,132,…是一个以 11 为公差的数字串，这些数的个位数相乘，因为有 110，所以各个尾数要和 0 相乘，乘积的尾数是 0.

【例 2】 $12^6+23^7+34^8+45^9$ 的和能否被 5 整除?（视频）

解：能被 5 整除的，尾数是 0 或 5. 我们只需看和的尾数即可知能否被 5 整除.

12^6 尾数是 4，23^7 的尾数是 7，34^8 的尾数是 6，45^9 的尾数是 5，和的尾数是 2. 所以不能被 5 整除.

【例 3】 求 $3^{1998}\times5^{1999}\times7^{2000}$ 的个位数字是几?（视频）

解：$1998\div4=499\cdots\cdots2$，根据尾数循环规律，$3^{1998}$ 尾数为 9，5 的任意次方尾数都是 5.

$2000\div4=500$，根据 7 的乘方尾数规律，7^{2000} 尾数为 1.

所以，原式的尾数为 $9\times5\times1$ 的尾数，即 5.

【例 4】 求 $94^{1997}-5^{1998}-7^{1999}$ 的个位数字是几?（**视频**）

分析：先求出 94^{1997}，5^{1998}，7^{1999} 的尾数，然后根据和（或差）的尾数等于尾数的和（或差）求出算式 $4^{1997}-5^{1998}-7^{1999}$ 的个位数字。

解：94^{1997}的尾数$\longrightarrow4^{1997}$的尾数$\longrightarrow4^{1}$的尾数$\longrightarrow4$，

5^{1998}的尾数$\longrightarrow5$，

7^{1999}的尾数$\longrightarrow7^{3}$的尾数$\longrightarrow3$，

$94^{1997}-5^{1998}-7^{1999}$的尾数$\longrightarrow14-5-3$的尾数$\longrightarrow6$.

即个位数字是 6.

【例 5】 求 $1\times1+2\times2+3\times3+\cdots+1996\times1996+1997\times1997$ 的个位数字.（**视频**）

解：$1\times1+2\times2+\cdots+9\times9+10\times10$ 的尾数和是：$1+4+9+6+5+6+9+4+1+0=45$，尾数是 5.

$11\times11+12\times12+\cdots+20\times20$ 尾数相同，为 5.

$1997\div10=199\cdots\cdots7$.

即个位数之和为 $199\times5+(1+4+9+6+5+6+9)=995+40=1035$.

个位为 5.

【例 6】 求 $1^{1998}+2^{1998}+3^{1998}+4^{1998}+\cdots+1997^{1998}+1998^{1998}$ 个位数字是几?（**视频**）

解：这些数的个位数字依次为 1,4,9,6,5,6,9,4,1,0,1,4,9,6,5,6,9,4,1,0…前 10 个数字之和为$(1+4+9+6+5+6+9+4+1+0)=45$. 个位数字为 5，每十项为一组.

$(1^{1998}+2^{1998}+\cdots+10^{1998})+(11^{1998}+12^{1998}+\cdots+20^{1998})+\cdots+(1981^{1998}+1982^{1998}+\cdots+1990^{1998})+1991^{1998}+1992^{1998}+\cdots+1998^{1998}$ 前 1990 项的和的个位数字为 5×199 的积的个位数字 5，而从 1991^{1998} 到 1998^{1998} 的个位数字依次为 1,4,9,6,5,6,9,4，其和为 44，即个位数字为 4，$5+4=9$.

所以这些数的个位数字的和是 9.

难题精讲

算式 $7+7\times7+\cdots+\underbrace{7\times7\times\cdots\times7}_{1990个7}$ 计算结果的末两位数字是多少?（**视频**）

解：我们只需算出 $7+7\times7+\cdots+\underbrace{7\times7\times\cdots\times7}_{1990个7}$ 的和除以 100 的余数，即

为其末两位数字.

7 除以 100 的余数为 7，7×7 除以 100 的余数为 49，$7\times7\times7$ 除以 100 的余数为 43，$7\times7\times7\times7$ 除以 100 的余数等于 43×7 除以 100 的余数为 1；

而 $\underbrace{7\times7\times\cdots\times7}_{5个7}$ 除以 100 的余数等于 $\underbrace{7\times7\times\cdots\times7}_{4个7}\times7$ 的余数，即为 7，…

这样我们就得到一个规律 $\underbrace{7\times7\times\cdots\times7}_{n个7}$ 除以 100 所得的余数，4 个数一循环，依次为 7,49,43,1.

$1990\div4=497\cdots\cdots2$，所以 $7+7\times7+\cdots+\underbrace{7\times7\times\cdots\times7}_{1990个7}$ 的和除以 100 的余数与下式同余.

$497\times(7+49+43+1)+7+49=49756$，除以 100 余 56.

所以算式 $7+7\times7+\cdots+\underbrace{7\times7\times\cdots\times7}_{1990个7}$ 计算结果的末两位数字是 56.

同步练习

1．100 个 3 连乘的积减去 5，所得的差的个位数是几.

2．求 $66^{66}+77^{77}+88^{88}+99^{99}$ 的个位数.

3．求 $\underbrace{(21\times25)\times(21\times25)\times\cdots\times(21\times25)}_{100个21\times25}$ 的尾数.

4．求 $\underbrace{0.7\times0.7\times\cdots\times0.7}_{2002个0.7}\times\underbrace{0.6\times0.6\times\cdots\times0.6}_{2002个0.6}$ 的尾数.

5．求 $\underbrace{1.2\times1.2\times\cdots\times1.2}_{2002个1.2}-\underbrace{0.4\times0.4\times\cdots\times0.4}_{2002个0.4}$ 的尾数.

6．$1^{19}+2^{95}+3^{19}+4^{95}+\cdots+1993^{19}+1994^{95}+1995^{19}$ 的个位数是几?

7．求 $253^{352}\times427^{724}+525^{252}-87^{78}$ 的个位数字.

8．$1^{10}+2^{10}+3^{10}+4^{10}+5^{10}+6^{10}+7^{10}+8^{10}+9^{10}+10^{10}$ 的个位数是几?

9．乘积 $1\times2\times3\times4\times\cdots\times1990\times1991$ 是一个多位数，而且末尾有许多零，从右到左第一个不等于零的数是几?

10．1991 个 1990 相乘所得的积与 1990 个 1991 相乘所得的积，再相加的和末两位数是多少?

同步练习参考答案

1．3 的乘方尾数按 3,9,7,1 循环．$100\div4=25$，所以，3^{100} 尾数为 1．

$3^{100}-5$，个位不够减，要借位，$11-5=6$．

所以，所得差的个位数是 6．

2．66^{66} 尾数为 6；

$77\div4=19\cdots\cdots1$，77^{77} 尾数为 7．

$88\div4=22$，88^{88} 尾数为 6．

$99\div4=24\cdots\cdots3$，99^{99} 尾数为 9．

原式的尾数为 $6+7+6+9$ 的尾数，即为 8．

3．21×25 的尾数为 5，所以，每个括号尾数均为 5．若干个 5 相乘尾数还是 5，所以，最后结果是 5．

4．0.7×0.6 尾数为 2，原式为 2002 个(0.7×0.6)相乘，所以，尾数为 2^{2002} 的尾数．

2 的乘方运算尾数按 2,4,8,6 循环，$2002\div4=500\cdots\cdots2$，因此，尾数为 4．

原式的尾数为 4．

5．1.2^{2002} 尾数为 4，0.4^{2002} 尾数为 6，$14-6=8$．

原式尾数为 8．

6．$19\div4=4\cdots\cdots3$，$95\div4=23\cdots\cdots3$．

1^{19} 个位为 1．2^{95} 个位为 8．3^{19} 个位为 7．4^{95} 个位为 4．

5^{19} 个位为 5．6^{95} 个位为 6．7^{19} 个位为 3．8^{95} 个位为 2．

9^{19} 个位为 9．10^{95} 个位为 0．

$(1^{19}+2^{95}+3^{19}+4^{95}+\cdots+10^{95})$的个位是 $1+8+7+4+5+6+3+2+9+0=45$ 的个位，为 5．

$11^{19}+12^{95}+13^{19}+14^{95}+\cdots+20^{95}$ 的个位与上式相同．

原式十个数一组，每组数的个位均为 5，共分成了 199 组，余 5 个数．

最后个位是 $5\times199+1+8+7+4+5=1020$ 的个位，为 0．

7．原式的尾数为 $3^4\times7^4+5-7^2$ 的尾数，

即为 $1\times1+5-9=7$．

8．$1+4+9+6+5+6+9+4+1+0=45$，个位数字是 5．

9．从 1 开始，将每 10 个数分为一组，每一组 10 个数从右到左第一个不

等于零的数字是乘积 $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10=3628800$ 从右到左第一个不等于零的数字是 8，1~1991 可分为 1~10，11~20，21~30，…，1981~1990，1991；8 的连乘积末位数字 8,4,2,6 重复出现，$199\div4=49\cdots\cdots3$，所以 199 个 8 相乘的末位数字是 2，1991 个位数字是 1，所以，$1\times2\times3\times\cdots\times1990\times1991$ 乘积从右到左第一个不等于零的数字是 2.

10．1991 个 1990 相乘所得的积末两位是 0，我们只需考虑 1990 个 1991 相乘的积的末两位数即可．1 个 1991 末两位数是 91，2 个 1991 相乘的积末两位数是 81，3 个 1991 相乘的积末两位数是 71，4 个至 10 个 1991 相乘的积的末两位数分别是 61,51,41,31,21,11,01,11 个 1991 相乘的积的末两位数字是 91,…，由此可见，每 10 个 1991 相乘的末两位数字重复出现，即周期为 10．因为 $1990\div10=199$，所以 1990 个 1991 相乘的积的末两位数是 01，即所求结果是 01.

第 11 讲 平方数

知识要点

一个数与自身相乘的结果叫平方数，例如：$1\times1=1$, $2\times2=4$, $3\times3=9$, 1,4,9 都叫平方数．常用的平方数有

$0\times0=0$, $1\times1=1^2=1$, $2\times2=2^2=4$, $3\times3=3^3=9$, $4\times4=4^2=16$，$5\times5=5^2=25$，$6\times6=6^2=36$，$7\times7=7^2=49$，$8\times8=8^2=64$，$9\times9=9^2=81$，$10\times10=10^2=100$，$11\times11=11^2=121$，$12\times12=12^2=144$，$13\times13=13^2=169$，…

其余的平方数请同学们自己计算．平方数的尾数规律：

0,1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225,256,289,324,361,400,…

我们将平方数按从大到小的顺序一字排开，观察尾数的规律，发现只有 0,1,4,5,6,9 可以成为平方数的尾数；2,3,7,8 不可能成为平方数的尾数．换句话说，凡是以 2,3,7,8 结尾的数都不会是平方数．

经典题再现

把一个两位数的个位数字与十位数字交换后得到一个新数，它与原数相加的和恰好是某个自然数的平方，这个两位数是多少?（**视频**）

解：设原来的两位数是 $\overline{ab}$，则

$\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11a+11b=11(a+b)$，

a,b 都是一位数，最大是 9，$a+b$ 最大等于 18，只有等于 11 时，上式才能是一个平方数．

即 $a+b=11$，则有：$a=2$，$b=9$；$a=3$，$b=8$；$a=4$，$b=7$；$a=5$，$b=6$ 四组答案；

交换 a,b 还可以得到 4 组．一共 8 个，即 29,92,38,83,47,74,56,65．

平方数是 $11\times11=121$．

典型例题

【例 1】 在 1857,19862,18888,24025 四个数中，是否有平方数?如果有是多少的平方?（**视频**）

解：按照平方数的尾数规律直接进行判断．但是要注意我们说平方数的个位数字只能是 0,1,4,5,6,9 中的一个，反过来一个数的个位数字是 0,1,4,5,6,9 中的一个，我们并不能直接说这个数就是平方数，如 120 的个位数字是 0，但 120 并不是平方数．

1857,19862,18888 因为尾数是 7,2,8，所以不可能是平方数．

24025 有可能是平方数，我们可以采用估算的方法．

24025 是 5 位数，$100\times100=10000$ 是 5 位数．

$200\times200=40000$ 是 5 位数．

所以，应是一百多的平方，并且个位数是 5．

我们可以试 $105\times105=11025$，$115\times115=13225$，$125\times125=15625$，

$135\times135=18225$，$145\times145=21025$，$155\times155=24025$．

【例 2】 已知，4 个四位数 35□2，3□57，3□36，□329，其中哪几个可以写成平方数?（**视频**）

解：35□2，3□57 因为个位数是 2,7，所以不可能是平方数．

剩下两个有可能是．我们可以试算．

根据尾数是 6，可以猜想 3□36 是一个两位数的平方，且个位是 4 或 6．

我们可以试 $16\times16=256$，太小．$96\times96=9216$，太大．

$56\times56=3136$，即 3□36 可以成为 56 的平方．同理，

$43\times43=1849$，$53\times53=2809$，$63\times63=3969$，$73\times73=5329$．

答：3136 可写成 56^2，5329 可写成 73^2．

【例 3】 有一类自然数，都是完全平方数，且后三位数字相同，那么这一类自然数中最小的一个是多少?（**视频**）

解：平方数的个位数字只可能是 0,1,4,5,6,9，而且三位数中，111,444,555,666,999 均不是平方数，四位数 1000,1111 也不是平方数，但 $1444=38^2$，所以符合题目要求的数应为 1444．

【例 4】 有两个数，它们各个数位的数字从左到右越来越大，其中一个六位数是另一个数的平方，求这两个数．（**视频**）

解：由题意可知这个六位数的个位数字应大于或等于 6．因为 $123456=3\times 8^2\times 643$ 不是完全平方数，又因为完全平方数个位只能是 0,1,4,5,6,9．所以这个六位数的个位只能是 9．则另一个数的个位只能是 3 或 7，并且另一个数是大于 300 的三位数．因为数字从左到右越来越大，所以个位数只能是 7，所以可能有 347,357,367,457,467,567．

$347^2=120409$，$357^2=127449$，$367^2=134689$，$457^2=208849$，$467^2=218089$，$567^2=321489$.

经检验，只有 $367^2=134689$ 符合题意.

所以这两个数为 367 和 134689．

【例 5】 $\overline{\underbrace{444\cdots4}_{2004个4}\underbrace{888\cdots8}_{2003个8}9}=A^2$，求 A 为多少?（**视频**）

解：问题直接求解有点难度，但是其数字有明显的规律，于是我们采用递推（找规律）的方法来求解：

注意到有 $\overline{\underbrace{444\cdots4}_{2004个4}\underbrace{888\cdots8}_{2003个8}9}$ 可以看成 $\overline{\underbrace{444\cdots4}_{n个4}\underbrace{888\cdots8}_{n-1个8}9}$，其中 $n=2004$；

寻找规律：当 $n=1$ 时，有 $49=7^2$；

当 $n=2$ 时，有 $4489=67^2$；

当 $n=3$ 时，有 $444889=667^2$；

…

于是，有 $\overline{\underbrace{444\cdots4}_{2004个4}\underbrace{888\cdots8}_{2003个8}9}=\overline{\underbrace{666\cdots6}_{2003个6}7}^2$，

$A=\underbrace{66\cdots6}_{2003个6}7$.

【例 6】 在 1987 上加一个三位数，使结果成为平方数，问这样的数共有多少个?（**视频**）

解：由于三位数最小是 100，最大是 999．$1987+100=2087$，

$1987+999=2986$．这样我们只需看 2087 到 2986 之间有几个平方数即可.

$45\times45=2025<2087$，$46\times46=2116,\cdots,54\times54=2916$，$55\times55=3025>2986$.

所以，符合条件的数有 $46^2,47^2,48^2,49^2,50^2,51^2,52^2,53^2,54^2$ 共 9 个数.

难题精讲

将所有自然数按如图所示方式排列，则 15120 应在第几行第几个位置上?

（从左向右数）.（**视频**）

1

2　3　4

5　6　7　8　9

10 11 12 13 14 15 16

…

解：通过观察可知，每一行的最后一个数是所在行的平方数.

又因为 $122^2<15120<123^2$，所以，15120 在第 123 行.

因为这些数是按自然顺序排列的，15120 减去前面 122 行的所有数的个数，就是它所在行的位置.（例如，12 在第四行，减去前 3 行 9 个数，$12-9=3$，就是 12 在第四行的位置）.

$15120-122^2=236$.

所以，15120 在第 123 行 236 个位置上.

同步练习

1．1000 位于两个平方数之间，这两个平方数哪一个更接近 1000?

2．在 3240,8972,2116,2475,2400 这 5 个数中，哪个数是平方数？是多少的平方？

3．5432154321…是一个 1999 位数，它能是一个平方数吗?

4．平方数除以 3 所得的余数是多少？

（A）可以取遍 0,1,2　　（B）只能取 0 或 1

（C）只能取 0 或 2　　（D）只能取 1 或 2

5．童欣玩具厂生产了一批电动熊猫玩具，准备装箱出厂．如果每箱装 70 只，5 箱装不满；如果每箱装 44 只，7 箱装不完．最后决定每箱装 A 只，这时恰好装满 A 箱而没有剩余．问这批电动玩具共有多少只?

6．一个小于 400 的三位数，它是完全平方数，它的前两位数字组成的两位数还是平方数，其个位数字也是一个平方数，那么这个三位数是多少?（**视频**）

7．已知 $\overline{ab2ba}$ 是一个完全平方数，且 a 是最大的一个数字，求出这个完全平方数.

8．计算$\underbrace{111\cdots1}_{2004个1}-\underbrace{222\cdots2}_{1002个2}=A^2$，求$A$．

9．甲、乙两人合养了 n 只羊，而每只羊的卖价又恰为 n 元，全部卖完后，两人分钱方法如下：先由甲拿 10 元，再由乙拿 10 元，如此轮流，拿到最后，剩下不足 10 元，轮到乙拿去．为了平均分配，甲应该补给乙多少元？

10．连续 1999 个自然数之和恰是一个完全平方数．则这 1999 个连续自然数中最大的那个数的最小值是多少？

同步练习参考答案

1．$30^2=900<1000$，

$31^2=961<1000$，

$32^2=1024>1000$，

所以，$31^2<1000<32^2$．

又因 $1024-1000=24$，

$1000-961=39$，

所以是 32^2．

2．8972 尾数可判定不是平方数．

$3240=2^3\times3^4\times5$，$2475=5^2\times3^2\times11$， $2400=2^5\times3\times5^2$，都不是平方数．

$2116=2^2\times23^2=2\times23\times2\times23=46^2$ 是平方数．

即 2116 是平方数．

3．$1999\div5=399\cdots\cdots4$，所以这个 1999 位数的个位数字是 2，而平方数的个位数字只可能是 0,1,4,5,6,9,所以这个数不可能是平方数．

4．平方数按从小到大排列：

0,1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225,256,289,324,361,400,⋯

对应除以 3 的余数分别为 0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,⋯

我们发现是 0,1,1 循环，所以答案选（B）．

5．$70\times5=350$, $44\times7=308$，玩具数是平方数，且小于 350，大于 308．

$17^2=289$,$18^2=324$,$19^2=361$，只能是 324．

即这批电动玩具共有 324 只．

6．小于 400 的三位数，且是平方数的有 100,121,144,169,196,225,256,289,324,361．

前两位也是平方数的为 169,256,361.

个位也是平方数的为 169,361.

所以，这样的三个数是 169 和 361.

7．a 显然是 9，五位数为 $\overline{9b2b9}$，试验有 $300^2<\overline{9b2b9}<320^2$，且个位数字是 3 或 7.

$307^2=94249$ 满足条件.

所以，这个完全平方数是 94249.

8．此题的显著特征是式子都含有 $\underbrace{111\cdots1}_{n个1}$，从而找出突破口.

$$\begin{aligned}\underbrace{111\cdots1}_{2004个1}-\underbrace{222\cdots2}_{1002个2} &= \underbrace{111\cdots1}_{1002个1}\ \underbrace{000\cdots0}_{1002个0}-\underbrace{111\cdots1}_{1002个1}\\ &= \underbrace{111\cdots1}_{1002个1}\times(\underbrace{1000\cdots0}_{1002个0}-1)\\ &= \underbrace{111\cdots1}_{1002个1}\times(\underbrace{999\cdots9}_{1002个9})\\ &= \underbrace{111\cdots1}_{1002个1}\times(\underbrace{111\cdots1}_{1002个1}\times3\times3)=A^2.\end{aligned}$$

所以，$A=\underbrace{333\cdots3}_{1002个3}$.

9．n 只羊的总价为 n^2 元，由题意知 n^2 元中含有奇数个 10 元，即完全平方数 n^2 的十位数字是奇数．如果完全平方数的十位数字是奇数，则它的个位数字一定是 6．所以，n^2 的末位数字为 6，即乙最后拿的是 6 元，从而为平均分配，甲应补给乙 2 元.

10．设这连续的 1999 个自然数的中间数为 a，则它们的和为 $1999a$，故 $1999a$ 为完全平方数，又因 1999 为质数，令 $a=1999t^2$（t 为自然数)，则这 1999 个连续自然数中的最大数为 $a+999=1999t^2+999$，$t=1$ 时，最大数的值最小，为 $1999+999=2998$.

即这 1999 个连续自然数中最大的那个数的最小值是 2998.

第 12 讲　推理问题

知识要点

推理问题主要依据逻辑关系，从已知的结论，推出新的结论，直到问题得到解决．解决这类问题很少进行计算，而是选择突破口，利用图表等进行分析判断，步步深入，最后得出结论．

经典题再现

有 8 个球的编号是①至⑧，其中 6 个球一样重，另外两个球都轻 1 克．为了找出这两个球，用天平称了 3 次．结果如下：

第一次① + ②比③ + ④重；

第二次⑤ + ⑥比⑦ + ⑧轻；

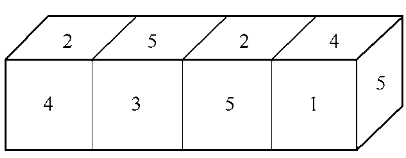
第三次① + ③ + ⑤与② + ④ + ⑧一样重，那么两个轻球分别是几号?（**视频**）

解：从第一次看，③,④两球中有一个轻，从第二次看，⑤,⑥两球中有一个轻；从第三次看，①,③,⑤中有一个轻，②,④,⑧中有一个轻．如果③是轻的，那么，②,④,⑧都是重的，这与条件矛盾．所以④是轻的，从而⑤也是轻的．

所以两个轻球的编号是④和⑤．

典型例题

【例 1】　下图是由 4 个完全一样的正方体拼成的一个长方体，每个正方体的 6 个面都按同样的顺序写着 1,2,3,4,5,6 六个数字，请写出每个数字对面上的数字是几?（**视频**）



解：用排除法．由于数字 5 出现的次数最多，先看 5．5 的对面不可能是 3,2,4,1．所以是 6．

4 的对面不可能是 2,1,5,6．所以是 3．

最后 1 的对面是 2．

【例 2】 甲、乙、丙 3 人分别戴着不同颜色的帽子，穿着不同颜色的衣服去参加“迎接新世纪”的联欢活动．已知：

① 帽子和衣服都只有红、黄、蓝 3 种颜色．

② 甲没戴红帽子，乙没戴黄帽子．

③ 戴红帽子的人没有穿蓝衣服．

④ 戴黄帽子的人穿红衣服．

⑤ 乙没有穿黄衣服．

那么这 3 个人分别戴什么帽子？穿什么衣服？（**视频**）

解：列表推理，斜体字为条件②,④,⑤直接得到的结论．

	红帽子	黄帽子	蓝帽子	红衣服	黄衣服	蓝衣服
甲	*错*	对	错	对（条件④）	错	错
乙	错（条件③）	*错*	对	*错*	*错*	对
丙	对	错	错	错	对	错

根据上表，最后得出结论：

甲戴黄帽子，穿红衣服；

乙戴蓝帽子，穿蓝衣服；

丙戴红帽子，穿黄衣服．

【例 3】 五年级 6 个班组织乒乓球单打比赛，每班派甲、乙两人参赛，根据规则每两人之间至多赛一场，且同班的两人之间不进行比赛．比赛若干场后发现，除一班队员甲以外，其他每人已比赛过的场数各不相同，那么，一班队员乙已赛过多少场？（**视频**）

解：除一班甲以外，其余 11 人比赛场数各不相同，并且每人至多比赛 10 场，所以他们的比赛场数是 0,1,2,⋯,9,10．

已赛 10 场的队员与除赛 0 场以外的队员都赛过，所以他们是同班．

已赛 9 场的队员与除赛 0 场、1 场的队员都赛过，所以他与赛 1 场的是同班．

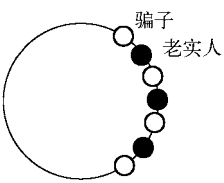
同理，已赛 8,7,6 场的队员与赛 2,3,4 场的队员是同班．

所以，甲与赛 5 场的队员同班，一班乙赛 5 场.

【例 4】 一个俱乐部里的成员只有两种人：一种是老实人，永远说真话；一种是骗子，永远说假话．某天俱乐部的全体成员围坐成一圈，每个老实人两旁都是骗子，每个骗子两旁都是老实人．外来一位记者问俱乐部的成员张三："俱乐部里共有多少成员？"张三答："共有 45 人."另一个成员李四说："张三是老实人."请判断李四是老实人还是骗子?（**视频**）

分析：解答此题的关键在于根据题设条件推导出老实人与骗子的人数相等，这里实质上利用了对应的思想.

解：根据"俱乐部的全体成员围坐一圈，每个老实人两旁都是骗子，每个骗子两旁都是老实人"的条件，可知俱乐部中的老实人与骗子的人数相等，也就是说俱乐部的全体成员总和是偶数．否则不满足题目条件，如下图所示.



而张三说共有 45 人是奇数，这说明张三是骗子，而李四说张三是老实人，说了假话，所以李四也是骗子.

答：李四是骗子.

【例 5】 有 49 个小孩，每人胸前有一个号码，号码从 1 到 49 各不相同，请你挑选若干小孩排成一个圆圈，使任何相邻两个小孩的号码的乘积小于 100，你最多能挑出多少个小孩?（**视频**）

解：要想两数乘积小于 100，其中必有一数小于 10，只有 9 个小于 10 的数，把它们排成一个圆，这个圆被分成了 9 段，每段上最多再来一个人，即两个小于 10 的数字中间再来一个数大于或等于 10 的．则一共可以挑出 $2\times9=18$（个）小孩.

【例 6】 甲、乙、丙、丁 4 位同学的运动衫上印有不同的号码．赵说："甲是 2 号，乙是 3 号."钱说："丙是 4 号，乙是 2 号."孙说："丁是 2 号，丙是 3 号."李说："丁是 1 号，乙是 3 号."又知道赵、钱、孙、李每人都只说对了一半．那么丙的号码是几号?（**视频**）

解：先假设赵的前半句话正确，判断一次，见下左表；再假设赵的后半句正确，判断一次，见下右表.

矛盾

赵说：甲是2号	✓	⓪	乙是3号	×	①
钱说：丙是4号	×	⑥	乙是2号	✓	⑦
孙说：丁是2号	×	④	丙是3号	✓	⑤
李说：丁是1号	✓	③	乙是3号	×	②

赵说：甲是2号	×	⓪	乙是3号	✓	①
钱说：丙是4号	✓	③	乙是2号	×	②
孙说：丁是2号	✓	⑤	丙是3号	×	④
李说：丁是1号	×	⑥	乙是3号	✓	⑦

表中序号表示推理顺序.

即甲是 1 号，乙是 3 号，丙是 4 号，丁是 2 号．所以丙的号码是 4 号.

答：丙的号码是 4 号.

难题精讲

在国际饭店的宴会桌旁，甲、乙、丙、丁 4 位朋友进行有趣的交谈，他们分别用了汉语、英语、法语、日语 4 种语言．并且还知道：

① 甲、乙、丙各会两种语言，丁只会一种语言；

② 有一种语言 4 人中有 3 人都会；

③ 甲会日语，丁不会日语，乙不会英语；

④ 甲与丙、丙与丁不能直接交谈，乙与丙可以直接交谈；

⑤ 没有人既会日语，又会法语.

请根据上面的情况，判断他们各会什么语言?（**视频**）

解：由条件③,④知丙不会日语，由⑤知甲不会法语．列下表，× 表示不会这门语言，√表示会这门语言.

	汉	英	法	日
甲			×	✓
乙		×		
丙				×
丁				×

以丙会不会汉语为突破口，分以下两种情况：

（1）如果丙会汉语，那么由④“甲与丙不能直接交谈”知甲不会汉语，由①知甲会英语，那么丙不会英语，会法语，列下左表.

由④“丙不能与丁直接交谈”，所以丁不会汉语也不会法语，那么丁会英语．由下右表知，这样就没有一种语言3人都会，与②矛盾，所以开始的假设不正确．

	汉	英	法	日
甲	×	√	×	√
乙		×		
丙	√	×	√	×
丁				×

	汉	英	法	日
甲	×	√	×	√
乙		×		
丙	√	×	√	×
丁	×	√	×	×

（2）丙不会汉语，由①知丙会英语、法语．由④“甲与丙不能直接交谈”，所以甲不会英语，由①知甲会汉语．

由④“丙与丁不能直接交谈”，所以丁不会英语，也不会法语．由①知丁会汉语，由下左表与②知只能是汉语三者都会．

所以乙会汉语，因为④，乙与丙能直接交谈，所以乙会法语，由①知乙不会日语．最终情况如下右表．

	汉	英	法	日
甲	√	×	×	√
乙		×		
丙	×	√	√	×
丁		×	×	×

	汉	英	法	日
甲	√	×	×	√
乙	√	×	√	×
丙	×	√	√	×
丁	√	×	×	×

同步练习

1．甲、乙、丙3人进行跑步比赛，A、B、C 3人对比赛结果进行预测．

A说：甲肯定是第一名．

B说：甲不是最后一名．

C说：甲肯定不是第一名．

其中只有一人对比赛结果的预测是对的，预测对的是哪一位？（**视频**）

2．某校五年级数学竞赛后，甲、乙、丙、丁4位同学猜测他们的获奖情况：

甲说：如果我能获奖，那么乙也能获奖.

乙说：如果我能获奖，那么丙也能获奖.

丙说：如果丁没有获奖，那么我也不能获奖.

实际上他们之中只有一个人没有获奖，并且甲、乙、丙的话都是对的．那么没能获奖的同学是哪一位?（**视频**）

3．A、B、C、D、E 5 人参加乒乓球比赛，每两人都要赛一场．按规定胜者得 2 分，负者得 0 分．已知比赛结果如下（无平局）：

① A 和 B 并列第一；

② C 是第三名；

③ D 和 E 并列第四名.

求 C 的得分.（**视频**）

4．A、B、C、D 4 个孩子中有一人踢球打碎了玻璃.

A 说："是 C 或 D 打碎的."

B 说："是 D 打碎的."

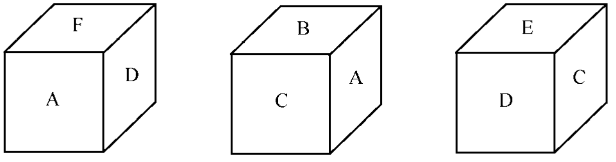
C 说："我没有打碎玻璃."

D 说："不是我打碎的."

已知他们中只有一个人说了谎话，那么玻璃一定是谁打碎的?

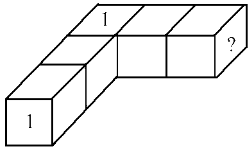
5．3 位国际友人中，穿白色上衣的先生说："我们 3 人中皮肤颜色各不相同，所穿上衣的颜色恰好是咱们 3 人的皮肤色，但谁穿的上衣都与自己的肤色不同."黑皮肤的先生听后，连连点头．问黄皮肤的先生穿的上衣是什么颜色?

6．一个正方体的 6 个面上分别写 A、B、C、D、E、F．根据下图摆放的 3 种情况，判断每个字母对面的字母是什么?



7．A、B、C、D、E、F 6 人围一圆桌坐下．B 是坐在 A 右边的第二人，C 是坐在 F 右边的第二人，D 坐在 E 的正对面，F 和 E 不相邻．那么坐在 A 和 B 之间的是谁?

8．已知在每个正方体的 6 个面上分别写着 1,2,3,4,5,6 这 6 个数，并且任意两个相对的面上所写的两个数的和都等于 7，现在把 5 个这样的正方体，一个挨着一个地连接起来，在紧挨着的两个面上的两个数之和都等于 8，那么图中“？”面上的数字是几?



9．某校数学竞赛，A、B、C、D、E、F、G、H 这 8 位同学获得前 8 名．老师让他们猜一下谁是第一名．A 说：“或者 F 是第一名，或者 H 是第一名．”B 说：“我是第一名．”C 说：“G 是第一名．”D 说：“B 不是第一名．”E 说：“A 说得不对．”F 说：“我不是第一名，H 也不是第一名．”G 说：“C 不是第一名．”H 说：“我同意 A 的意见．”老师指出：8 个人中有 3 人猜对了．那么第一名是谁?

10．甲、乙、丙、丁 4 个同学同在一间教室里，他们当中一个人在做数学题，一个人在念英语，一个人在看小说，一个人在写信．已知：

① 甲不在念英语，也不在看小说；

② 如果甲不在做数学题，那么丁不在念英语；

③ 有人说乙在做数学题，或在念英语，但事实并非如此；

④ 丁如果不在做数学题，那么一定在看小说，这种说法是不对的；

⑤ 丙既不在看小说，也不在念英语．

那么在写信的人是谁?

同步练习参考答案

1．因为 A 和 C 的预测结果刚好相反，必一对一错．又知只有一人对，所以 B 的预测肯定是错的，即甲是最后一名，C 对．

即预测对的是 C．

2．如果甲获奖，那么根据乙、丙的话，乙、丙、丁也都获奖．所以是甲没有获奖．

即没有获奖的同学是甲．

3．我们从 A 和 B 并列第一名，D 与 E 并列第四名出发考虑得分情况.

由题意知，一共要进行 4+3+2+1=10（场）比赛.

根据已知条件可得

（1）由于 A 和 B 并列第一，所以 A 和 B 每人最多只能胜 3 场.

（2）由于 D 和 E 并列第四名，所以 D 和 E 最少各胜一场，且只能胜一场.

由此可得 C 胜两场，得 4 分.

即 C 的最后得分是 4 分.

4．假设玻璃是 A 打碎的，那么 A 与 B 的话都是谎话，所以不是 A；假设玻璃是 B 打碎的，那么 A 与 B 的话都是谎话，所以不是 B；假设玻璃是 C 打碎的，那么 B 与 C 的话都是谎话，所以不是 C；则玻璃肯定是 D 打碎的．请自行检验.

5．肤色与上衣颜色不同有两种情况，见下表.

	白皮肤	黄皮肤	黑皮肤
①	黑上衣	白上衣	黄上衣
②	黄上衣	黑上衣	白上衣

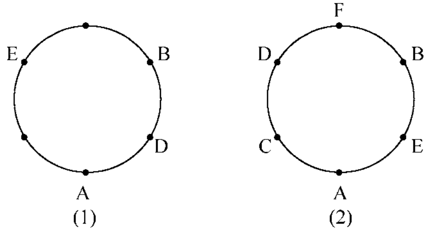
由题意得，穿白上衣的不是黑皮肤，所以是第一种情况，黄皮肤先生穿白上衣.

6．排除法：A 的对面不可能是 D、F、B、C．所以是 E.

C 的对面不可能是 A、B、D、E．所以是 F.

B 的对面是 D.

7．如下图所示.



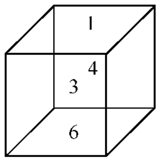
(1)　　(2)

先让 A 随便坐，接着确定 B 的座位，C 和 F 的位置这时不好确定，D

和 E 的位置有如图（1）和（2）所示的两种，经判断（2）符合题意，所以 A 和 B 之间是 E.

8．从最前面的一个立方体开始一块一块拆开，1 的对面是 6，与 6 挨着的面是 2，2 的对面是 5，与 5 挨着的面是 3，这样到了最左上角的立方体.

对这一块来说，3 的对面是 4，1 的对面是 6，如下图所示．剩下 2 和 5.



如果左 5 右 2，则挨着 2 的面是 6，6 的对面是 1，挨着 1 的面是 7，矛盾．所以应是左 2 右 5，挨着 5 的面是 3，3 的对面是 4，挨着 4 的面是 4，4 的对面是 3.

即“？”面上的数字是 3.

9．我们抓住谁是第一名这点，一一尝试.

如果 A 是第一名，那么 D、E、F、G 这 4 人都猜对了，不符合题意；

如果 B 是第一名，那么 B、E、F、G 这 4 人都猜对了，不符合题意；

如果 C 是第一名，那么 D、E、F 这 3 人都猜对了，符合题意；

如果 D 是第一名，那么 D、E、F、G 这 4 人都猜对了，不符合题意；

如果 E 是第一名，那么 D、E、F、G 这 4 人都猜对了，不符合题意；

如果 F 是第一名，那么 A、D、G、H 这 4 人都猜对了，不符合题意；

如果 G 是第一名，那么 C、D、E、F、G 这 5 人都猜对了，不符合题意；

如果 H 是第一名，那么 A、D、G、H 这 4 人都猜对了，不符合题意.

所以，第一名是 C.

10．我们将①,③,⑤的条件反映在下左表中．“×”表示对应列的人不在做对应行的事.

显然只能是丁在念英语，由②知甲在做数学题，那么丙只能在写信．进一步可以得到结论如下右表．表中“√”表示对应列的人在做对

应行的事.

	甲	乙	丙	丁
做数学题		×		
念英语	×	×	×	
看小说	×		×	
写信				

	甲	乙	丙	丁
做数学题	√	×		
念英语	×	×	×	√
看小说	×	√	×	
写信			√	

第 13 讲 抽屉原理

知识要点

抽屉原理一：将 $n+1$ 个元素放到 n 个抽屉中去，则无论怎么放，必定有一个抽屉至少有两个元素.

抽屉原理二：将 $nr+1$ 个元素放到 n 个抽屉中去，则无论怎么放，必定有一个抽屉至少有 $r+1$ 个元素.

使用抽屉原理解题，关键是构造抽屉．一般说来，数的奇偶性、按余数分类、数的分组、染色、线段与平面图形的划分等，都可作为构造抽屉的依据.

经典题再现

一副扑克牌（去掉两张王牌），每人随意摸两张牌，至少有多少人才能保证他们当中一定有两人所摸两张牌的花色情况是相同的?（**视频**）

解：扑克牌中有方块、梅花、黑桃、红桃 4 种花色，2 张牌的花色可以有：2 张方块、2 张梅花、2 张红桃、2 张黑桃、1 张方块 1 张梅花、1 张方块 1 张黑桃、1 张方块 1 张红桃、1 张梅花 1 张黑桃、1 张梅花 1 张红桃、1 张黑桃 1 张红桃共计 10 种情况．把这 10 种花色配组看做 10 个抽屉，只要摸牌的人数比抽屉的个数多 1 个就可以有题目所要的结果．所以至少有 11 个人.

（本题按题目本身的特点来构造抽屉.）

典型例题

【例 1】 黑色、白色、黄色的筷子各有 8 根，混杂着放在一起．黑暗中想从这些筷子中取出颜色不同的两双筷子，至少要取多少根才能保证达到要求？（**视频**）

解：将每个颜色看成一个抽屉，每个抽屉里有 8 根筷子．最不走运的情况是开始拿了 8 根全为一色，然后又拿了 2 根为另外两种颜色，最后再任拿一根便能达到要求，所以共拿 11 根.

【例 2】 是否可以找到一个各位数字都是 4 的自然数，它是 1996 的倍数?**（视频）**

解：因 $1996\div4=499$，故只要可以找到一个各位数字都是 1 的自然数，它是 499 的倍数就可以了.

取500个数：$1,11,111,\cdots,\underbrace{11\cdots1}_{500个1}$.用499去除这500个数，得到 500 个余数 $r_1,r_2,\cdots,r_{500}$. 由于余数只能取 $0,1,2,\cdots,499$ 这 499 个值，所以根据抽屉原理，必有两个余数是相同的，这两个数的差就是 499 的倍数，这个差的前若干位是 1，后若干位是 0，即 $11\cdots100\cdots0$，又因 499 和 10 是互质的，故它的前若干位由 1 组成的自然数是 499 的倍数，将它乘以 4，就得到一个各位数字都是 4 的自然数，它是 1996 的倍数.

答：可以找到这样的数.

（本题是按余数分类来构造抽屉）

【例 3】 从 $1,2,3,\cdots,100$ 这 100 个数中任意挑出 51 个数来，能否在这 51 个数中找出满足下列条件之一的数?**（视频）**

① 有 2 个数互质;

② 有 2 个数的差为 50;

③ 有 8 个数，它们的最大公约数大于 1.

解：① 将 100 个数分成 50 组：

$$(1,2),(3,4),\cdots,(99,100).$$

在选出的 51 个数中，必有两个数属于同一组，这一组中的两个数是两个相邻的整数，它们一定是互质的.

② 将 100 个数分成 50 组：

$$(1,51),(2,52),\cdots,(50,100).$$

在选出的 51 个数中，必有两个数属于同一组，这一组的两个数的差为 50.

③ 将 100 个数分成 5 组（一个数可以在不同的组内)：

第一组：2 的倍数，即$(2,4,\cdots,100)$;

第二组：3 的倍数，即$(3,6,\cdots,99)$;

第三组：5 的倍数，即$(5,10,\cdots,100)$;

第四组：7 的倍数，即$(7,14,\cdots,98)$;

第五组：1 和大于 7 的质数即$(1,11,13,\cdots,97)$.

第五组中有 22 个数，故选出的 51 个数至少有 29 个数在第一组到第四组中，根据抽屉原理，总有 8 个数在第一组到第四组的某一组中，这 8 个数的最大公约数大于 1.

答：可以找到符合题意的数.

（本题采用分组的办法来构造抽屉）

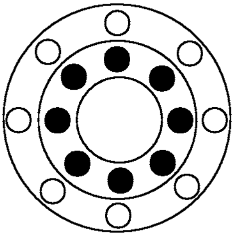
【例 4】 在一个礼堂中有 99 名学生，如果他们中的每个人都与其中的 66 人相识，会不会出现这种情况：他们中的任何 4 人中都一定有 2 人不相识（假定相识是互相的）?请说明理由.（**视频**）

解：将礼堂中的 99 人分为 3 组.

将 3 个组作为 3 个抽屉，分别记为 A、B、C，并约定 A 中的学生所认识的 66 人只在 B、C 中，同时，B、C 中的学生所认识的 66 人也只在 A、C 和 A、B 中．如果出现这种局面，那么题目中所说情况就会出现.

因为礼堂中任意 4 人可看做 4 个苹果，放入 A、B、C 3 个抽屉中，必有两人在同一抽屉，即必有两人来自同一组，那么他们认识的人只在另两组中，因此他们两人不相识.

【例 5】 如下图所示，分别标有数字 1,2,⋯,8 的滚珠两组，放在内外两个圆环上，开始时相对的滚珠所标数字都不相同．当两个圆环按不同方向转动时，必有某一时刻，内外两环中至少有两对数字相同的滚珠相对．予以证明.（**视频**）



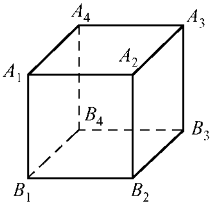
解：内外两环对转可看成一环静止，只有一个环转动．一个环转动一周后，每个滚珠都会有一次与标有相同数字的滚珠相对的局面出现，那么这种局面共要出现 8 次．将这 8 次局面看做苹果，再需构造出少于 8 个抽屉.

注意到一环每转动 45° 角就有一次滚珠相对的局面出现，转动一周共有 8 次滚珠相对的局面，而最初的 8 对滚珠所标数字都不相同，所以数字相同的滚珠相对的情况只出现在以后的 7 次转动中，将 7 次转动看做 7 个抽屉，8 次相同数字滚珠相对的局面看做 8 个苹果，则至少有两次数字相对的局面出现在同

一次转动中，即必有某一时刻，内外两环中至少有两对数字相同的滚珠相对.

【例 6】 甲、乙两人为一个正方形的 12 条棱涂红和绿 2 种颜色. 首先，甲任选 3 条棱涂上红色；然后，乙任选另外 3 条棱涂上绿色；接着甲将剩下的 6 条棱都涂上红色. 问甲是否一定能将某一面的 4 条棱全部涂上红色?（**视频**）

解：如下图所示，将 12 条棱分成 4 组：



第一组：$\{A_1B_1，B_2B_3，A_3A_4\}$，

第二组：$\{A_2B_2，B_3B_4，A_4A_1\}$，

第三组：$\{A_3B_3，B_4B_1，A_1A_2\}$，

第四组：$\{A_4B_4，B_1B_2，A_2A_3\}$.

无论甲第一次将哪 3 条棱涂红，由抽屉原理知 4 组中必有一组的 3 条棱全未涂红，而乙只要将这组中的 3 条棱涂绿，甲就无法将某一面的 4 条棱全部涂红了.

答：甲不一定能将某一面的 4 条棱全部涂上红色.

难题精讲

在圆周上放着 100 个筹码，其中有 41 个红的和 59 个蓝的. 那么总可以找到两个红筹码，在它们之间刚好放有 19 个筹码，为什么?（**视频**）

分析：此题需要研究“红筹码”的放置情况，因而涉及到“苹果”的具体放置方法，由此我们可以在构造抽屉时，使每个抽屉中的相邻“苹果”之间有 19 个筹码.

解：依顺时针方向将筹码依次编上号码 1,2,⋯,100. 然后依照以下规律将 100 个筹码分为 20 组：

(1,21,41,61,81)；

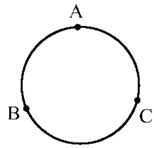
(2,22,42,62,82)；

…

(20,40,60,80,100).

将 41 个红筹码，放入以上 20 个抽屉中，因为 $41=2\times 20+1$，所以至少有一个抽屉中有 $2+1=3$（个）红筹码，也就是说必有一组 5 个筹码中有 3 个红筹码，而每组的 5 个筹码在圆周上可看做两两等距，且每两个相邻筹码之间都有 19 个筹码，那么 3 个红筹码中必有 2 个相邻，理由如下：

3 个红筹码 A、B、C 放在圆周上，形成 3 个空，另两个筹码放进 3 个空，一定有一空没放，所以，必有两个红筹码相邻.



而每两个筹码之间有 19 个筹码，即有 2 个红筹码之间有 19 个筹码.

同步练习

1．从 1,2,3,…,1988,1989 这些自然数中，最多可以取出多少个数，使得其中每两个数的差不等于 4?

2．一次数学竞赛共 10 道题．评分标准为：基础分 10 分，答对一题得 3 分，答错一题扣 1 分，不答题不得分也不扣分．要确保 5 人分数相同，至少要有多少人参加比赛?

3．证明：任给 12 个不同的两位数，其中一定存在着这样的两个数，它们的差是个位与十位数字相同的两位数．

4．有一个生产天平上用的铁盘的车间，由于工艺上的原因，只能控制盘的重量在指定的 20 克到 20.1 克之间．现在需要重量相差不超过 0.005 克的两只铁盘来装配一架天平，问：最少要生产多少个盘子，才能保证一定能从中挑出符合要求的两只盘子？

5．某班有 16 名学生，每个月教师把学生分成两个小组．问最少要经过几个月，才能使该班的任意两个学生总有某个月份是分在不同的小组里?

6．上体育课时，21 名男、女学生排成 3 行 7 列的队形做操．老师是否总能从队形中画出一个长方形，使得站在这个长方形 4 个角上的学生都是男生，或者都是女生?如果能，请说明理由；如果不能，请举出实例．

7．在任取的 5 个自然数中，必有 3 个数，它们的和是 3 的倍数．请说明理由.

8．某校校庆，来了 n 位校友，彼此认识的握手问候．请你证明无论什么情况，在这 n 位校友中至少有两人握手的次数一样多．

9．平面上有 A、B、C、D、E、F 6 个点，其中没有 3 点共线，每两点之间任意选用红线或蓝线连接，那么，不管怎样连接，至少存在一个 3 边同色的三角形．请你说明理由．

10．一家旅馆有 90 个房间，住有 100 名旅客，如果每次都恰有 90 名旅客同时回来，那么至少要准备多少把钥匙分给这 100 名旅客，才能使得每次客人回来时，每个客人都能用自己分到的钥匙打开一个房门住进去，并且避免发生两人同时住进一个房间？

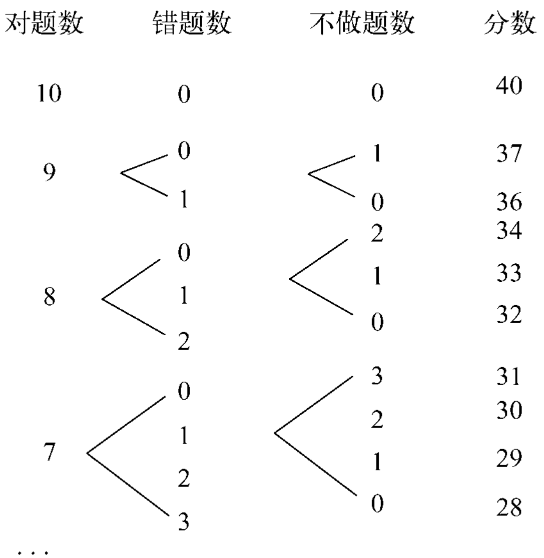
同步练习参考答案

1．1,2,3,4,9,10,11,12,17,18,19,20,25,…

这些数中任何两个数的差都不为 4，这些数是每 8 个连续的数中选取前 4 个连续的数．

有 $1989 \div 8=248 \cdots\cdots 5$，所以最多可以选 $248 \times 4+4=996$（个）数．

2．0 到 40 的分数共有 41 种，实际上少了 39 分、38 分、35 分 3 种，如下图所示．



所以，共有 41−3=38（种）.

由第二抽屉原理，5 人分数相同，需要 $38\times4+1=153$（人）.

3．因为两个不同的两位数相减得到的差不可能为三位或三位以上的数．如果这个差是 11 的倍数，那么一定有这个差的个位与十位数字相同．

两个数的差除以 11 的余数有 0,1,2,3,⋯,10 这 11 种情况．将这 11 种情况视为 11 个抽屉．

将 12 个数视为 12 个苹果，那么必定有两个苹果在同一抽屉，也就是说有两个数除以 11 的余数相同，那么它们的差一定是 11 的倍数．

而两个两位数的差一定是一个两位数，如果这个差是 11 的倍数，那么就有个数与十位数字相等．问题得证．

4．把 20～20.1 克之间的盘子依重量分成 20 组：

第 1 组：从 20.000 克到 20.005 克；

第 2 组：从 20.006 克到 20.010 克；

…

第 20 组：从 20.095 克到 20.100 克．

这样，只要有 21 个盘子，就一定可以从中找到两个盘子属于同一组，这 2 个盘子就符合要求．

5．经过第一个月，将 16 个学生分成两组，至少有 8 个学生分在同一组，下面只考虑这 8 个学生．

经过第二个月，将这 8 个学生分成两组，至少有 4 个学生是分在同一组，下面只考虑这 4 个学生．

经过第三个月，将这 4 个学生分成两组，至少有 2 个学生仍分在同一组，这说明只经过 3 个月是无法满足题目要求的．

如果经过 4 个月，将每个月都一直保持同组的学生一分为二，放入两个组，那么第一个月保持同组的人数为 $16\div2=8$（人），第二个月保持同组的人数为 $8\div2=4$（人），第三个月保持同组人数为 $4\div2=2$（人）．这说明，照此分法，不会有 2 个人一直保持在同一组内，即满足题目要求，故最少要经过 4 个月．

6．因为只有男生或女生两种情况，所以第 1 行的 7 个位置中至少有 4 个位置同性别．

为了确定起见，不妨设前 4 个位置同是男生，如果第二行的前 4 个位置

有 2 名男生，那么 4 个角同是男生的情况已经存在，所以我们假定第二行的前 4 个位置中至少有 3 名女生，不妨假定前 3 个是女生.

又第三行的前 3 个位置中至少有 2 个位置是同性别学生，当有 2 名男生时与第一行构成一个四角同性别的矩形，当有 2 名女生时与第二行构成四角同性别的矩形.

所以，不论如何，总能从队形中画出一个长方形，使得站在这个长方形 4 个角上的学生同性别．问题得证.

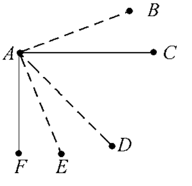
7．按照被 3 除所得的余数，把全体自然数分成 3 个剩余类，即构成 3 个抽屉．如果任选的 5 个自然数中，至少有 3 个数在同一个抽屉，那么这 3 个数除以 3 得到相同的余数 r，所以它们的和一定是 3 的倍数（$3r$ 被 3 整除）.

如果每个抽屉至多有 2 个选定的数，那么 5 个数在 3 个抽屉中的分配必为 1 个、2 个、2 个，即 3 个抽屉中都有选定的数．在每个抽屉中各取 1 个数，那么这 3 个数除以 3 得到的余数分别为 0,1,2．因此，它们的和也一定能被 3 整除（0+1+2 被 3 整除）.

8．共有 n 位校友，每个人握手的次数最少是 0 次，即这个人与其他校友都没有握过手；最多有 $n-1$ 次，即这个人与每位到会校友都握了手．校友人数与握手次数的不同情况（$0,1,2,\cdots,n-1$）数都是 n，还无法用抽屉原理.

然而，如果有一个校友握手的次数是 0 次，那么握手次数最多的不能多于 $n-2$ 次；如果有一个校友握手的次数是 $n-1$ 次，那么握手次数最少的不能少于 1 次．不管是前一种状态 $0,1,2,\cdots,n-2$，还是后一种状态 $1,2,3,\cdots,n-1$，握手次数都只有 $n-1$ 种情况．把这 $n-1$ 种情况看成 $n-1$ 个抽屉，到会的 n 个校友每人按照其握手的次数归入相应的“抽屉”，根据抽屉原理，至少有两个人属于同一抽屉，则这两个人握手的次数一样多.

9．我们用虚线表示红色，用实线表示蓝色．从任意一点 A 出发，要向 B,C,D,E,F 连 5 条线段．因为只有两种颜色，所以根据抽屉原理，至少有 3 条线段同色．不妨设 AB、AD、AE 3 线同红色，如下图所示.



如果 B,D,E 这 3 点之间所连的 3 条线段中有一条是红色的，则出现一个 3 边为红色的三角形．如果这 3 点之间所连线段都不是红色，那么就都是蓝色的．这样，三角形 BDE 就是一个蓝色的三角形．因此，不管如何连彩线，总可以找到一个 3 边同色的三角形．

10．如果钥匙数小于 990，那么 90 个房间中至少有一个房间的钥匙数少于 $\frac{990}{90}=11$，而当持有这房间钥匙的客人（至多 10 名）全部未回来时，这个房间就打不开，因此 90 个人就无法按题述的条件住下来．

另一方面，990 把钥匙已经足够了，这只要将 90 把不同的钥匙分给 90 个人，而其余的 10 名旅客，每人各 90 把钥匙（每个房间一把），那么任何 90 名旅客返回时，都能按要求住进房间．

第14讲　第一学期综合题选讲

知识要点

综合运用我们前面所学的知识，对题型及解法迅速做出判断，是我们学好数学的必备条件．这一讲我们就对不归类的题型进行讲解．

经典题再现

五名选手在一次数学竞赛中共得 412 分．每人得分互不相同，并且最高得分为 90 分．那么得分最少的选手至少得多少分？至多得多少分？（**视频**）

解：要使得分最少的选手的得分尽可能少，在五名选手总分一定的条件下，应该使前四名与第五名的分数差尽可能大．第一名是 90 分，且得分互不相等，于是，只有第二、三、四名依次为 89，88，87 分时，第五名得分最少．

$412-(90+89+88+87)=58$（分）．

要使得分最低的选手得分尽量多，在总分及第一名得分一定的条件下，应该使第二、三、四、五名的得分尽可能靠近，故只有当第二、三、四、五名的得分为 4 个连续自然数时，第五名的得分才可能最大．

$[412-90-(1+2+3)]\div 4=79$（分）．

答：得分最少的选手至少得 58 分，至多得 79 分．

典型例题

【例 1】 有一个两位数，十位上的数字是个位上的数字的 2 倍．如果把十位上的数字与个位上的数字交换，就得到另一个两位数，把这个两位数与原来的数相加，和是 132．问原来的两位数是多少？（**视频**）

解：设原来的两位数十位为 a，个位为 b，列竖式：

$$\begin{array}{r}a\ \ b\\+\ b\ \ a\\\hline 1\ \ 3\ \ 2\end{array}$$

从十位看，$a+b$ 进 1，从个位看，$b+a$ 的个位是 2，则 $a+b=12$．所以，$a=8$，$b=4$．

答：原来的两位数为 84．

【例 2】 自然数按从小到大排列：1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,…把这串数中两位以上的数字全部隔开，组成第二串数：1,2,3,4,5,6,7,8,9,1,0,1,1,…请回答：第一串数中的 100 的个位上的 0 在第二串数中是第几个数?（**视频**）

解：第一串的 1～9 在第二串中有 9 个数字，第一串中的 10～99 共有 90 个两位数，在第二串中共有$(2\times 90)=180$（个）数字，所以，100 的个位数字 0 在第二串中是第$(9+180+3)=192$（个）数字．

答：100 的个位上的 0 是第二串数的第 192 个数字．

【例 3】 甲、乙、丙 3 位同学为 7 棵树苗浇水，由于各棵树距水源的路程不同，需浇水的时间分别为 4,5,6,6,8,9,9 分钟．现 3 人同时开始各自浇水，至少多少分钟全部浇完?（先浇完的同学不能去帮助其他同学）（**视频**）

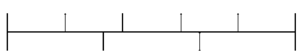
解：$4+5+6+6+8+9+9=47$（分钟）．$47\div 3=15\cdots\cdots 2$，平均每人 15 分钟，多 2 分钟．

分配方法：甲浇需 4、5、6 分钟的 3 棵；乙浇需 8、9 分钟的两棵；丙浇需 6、9 分钟的两棵．

答：最少 17 分钟全浇完．

【例 4】 小明买来一块 1500 克的生日蛋糕，他把蛋糕切成了 7 小块，使得无论是 3 个人还是 5 个人平分，都不必再分割蛋糕．则 7 小块蛋糕的重量分别是____，____，____，____，____，____，____克．（**视频**）

解：我们把这个 1500 克的蛋糕看做一条长为 15 的线段．先将该线段 5 等分，尔后再把它 3 等分，两次分割的各等分点分别标在如下图所示的线段的上方和下方．

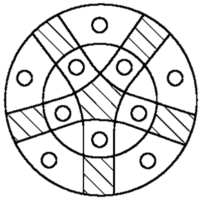


位于线段内部的点共有$(5-1)+(3-1)=6$（个），恰把线段分成 7 段．即相

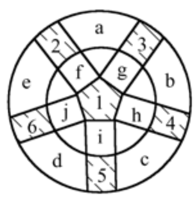
当于把蛋糕分成 7 小块，它们的重量分别是 300,200,100,300,100,200,300 克．具体分配时，只需在上述序列中依次截取和为 500 或 300 的段即可，每份实际上对应于那条线段中等分出的一小段．

答：7 小块蛋糕的重量分别为 300,300,300,200,200,100,100（可交换次序）．

【例 5】 如下图所示，一个圆桌的表面被分成若干部分，其中每个画有圆圈的部分都放有一个苹果．现在小明把每个阴影部分都染成红色或蓝色，于是每个放有苹果的部分都恰好和两个有色部分相邻．如果这两部分不同色，那么小明就把它们之间的苹果拿走，这样小明最多能拿走多少个苹果？（**视频**）



解：我们将放有苹果的部分和阴影区域分别用字母和数字标出，如下图所示．



在两个圆周所夹的环形区域内包含的有色部分为 2,3,4,5,6，共奇数个，所以必有两个相继的有色部分同色，它们之间的苹果不会被拿走．不妨假设 a 中的苹果没有被拿走，接下来考虑有色部分 1,2,6，它们中必有两部分同色，故这两部分之间的苹果也不能被拿走，也就是说，e,f,j 中至少有一个苹果不能被拿走．同理考虑有色部分 1,3,4 可知，b,g,h 中至少有一个苹果不能被拿走．因此小明最多能拿走 10−3=7（个）苹果．事实上，拿走 7 个苹果是可以做到的，例如把 2,3,5 染成红色，把 1,4,6 染成蓝色．则除 a,j,h 外的 7 个苹果均被拿走．

答：小明最多能拿走 7 个苹果．

【例 6】 用 8 个数字 2,2,3,3,4,5,6,7 组成两个四位数，使它们的和是 6116，那么其中较大的四位数的最大可能值是多少？（**视频**）

解：最小的是 2233，但 6116−2233=3883，不行．但是可以知道最大数的首位数字是 3．

我们试验 3765．6116−3765=2351，不行．

6116−3764=2352，可以．

答：其最大可能值是 3764．

难题精讲

桌上放着 100 个已经涂了色的小球，包括红球、白球、黄球．允许你对它们改色，办法是：取出两个不同色的球，把它们涂上与它们颜色都不同的另一种颜色（例如你取出一个白球一个黄球，就把它们都改涂为红色），然后放回桌上，这叫“一次操作”．问：经过有限次操作后，你能否把所有球都改为同一种颜色？说明你的理由．（**视频**）

解：100 不是 3 的倍数，设原有红球、白球、黄球各 x、y、z 个．那么 x、y、z 不都是 3 的倍数，也不可能出现这样的情形：x、y、z 3 个数被 3 除后的余数互不相同（否则 $x+y+z=100$ 就应该是 3 的倍数）．可见，x、y、z 中有两个被 3 除的余数相同，另一个被 3 除的余数与它们不同．

设 y、z 被 3 除之后的余数相同，x 被 3 除后的余数与它们不同．

如果 $y=z$，那么可以用一白一黄变两个红球的方式经过有限步骤把所有的球都变为红色．如果 $y\neq z$．比如说 $y<z$，$z-y$ 必是 3 的倍数．那么可以先进行“1 白 1 黄变 2 红”的改色，直到把白球用完，这时桌上的球只有 2 种：红球和黄球．而此时黄球数目 $z-y$ 是 3 的倍数．把黄球 3 个一组进行分组，黄球被分成若干组，取出一组（3 个）黄球和 1 个红球，对这一组（4 个球）进行改色，办法是：

先用 1 红 1 黄变 2 白，这时 4 个球是 2 白、2 黄．再把 2 白 2 黄变为 4 红．于是每 3 个黄球加 1 个红球都可变为 4 个红球．因为黄球的组数是有限的，而红球越改越多，所以经过有限步改色后，总可使桌上的球全变为红色．

同步练习

1．有 5 个数，每取两个相加，得到 10 个和，再把这 10 个和相加，得到

的和是 2064．问原来的 5 个数的和是多少?

2．从 11 至 18 这 8 个连续整数的和再加上 2520 恰好等于另 8 个连续的整数的和，则其中最小的一个数是多少?

3．1999 年的 1 月 1 日是星期五，那么 2000 年的 1 月 1 日是星期几?

4．白母鸡生 2 个蛋歇一天，黑母鸡生 1 个蛋歇 2 天，两只鸡一共要生 60 个蛋，需要多少天?

5．有些四位数是 7 的倍数，且将它从中间划分成前后两个两位数时，前面的数能被 3 整除，后面的数能被 5 整除，那么所有这样的数中最小的一个是多少?

6．将 1 至 8 分别写在立方体的 8 个角上，使得每个面上 4 个角处所标的数字之和相等.

7．两个学生抄写同一个乘法算式，两个乘数都是两位数．他们各抄错了一个数字，于是得到两个不同的算式，但巧合的是，他们计算的结果都是 936．如果正确的乘积不能被 6 整除，那么它等于多少?

8．某月有 5 个星期一，但是这个月的第一天和最后一天都不是星期一．那么，这个月的第一天是星期几？这个月有多少天?

9．8 个大于零的自然数排成一排，从第三个数开始，每个数都是它前面两个数之和，已知第四个数是 4，求第七个数.（**视频**）

10．如下图所示，把一枚棋子放入格①后，每次只能向左移动一格或两格，那么棋子从格①移到格⑦共有多少种方法?（**视频**）

⑦	⑥	⑤	④	③	②	①

同步练习参考答案

1．设这 5 个数分别是 A、B、C、D、E.

这 5 个数两两之间的和分别是：$A+B$，$A+C$，$A+D$，$A+E$，$B+C$，$B+D$，$B+E$，$C+D$，$C+E$，$D+E$.

这 10 个和相加：

$(A+B)+(A+C)+(A+D)+(A+E)+(B+C)+(B+D)+(B+E)+(C+D)+(C+E)+(D+E)$

$=4\times(A+B+C+D+E)$.

所以，原来 5 个数的和是：

$2064 \div 4=516$.

2．$2520 \div 8=315$，给 11,12,⋯,18 每一个都加上 315，还是 8 个连续自然数，最小的是 $11+315=326$.

3．把 1999 年的 1 月 1 日作为第一天，给每一天进行编号，1999 年有 365 天，也就是说 1999 年的最后一天是第 365 天，所以 2000 年 1 月 1 日是第 366 天.

对于每一天相应的星期数，7 天循环，是“星期五，星期六，星期日，星期一，星期二，星期三，星期四”.

$366=7 \times 52+2$，说明第 366 天是一个循环的第二天，即相应的星期数是星期六，所以 2000 年的 1 月 1 日是星期六.

4．白母鸡：○○×|○○×|⋯○○×

黑母鸡：○××|○××|⋯○××

或　白母鸡：○○×|○○×|⋯○○×

黑母鸡：×○×|×○×|⋯×○×

或　白母鸡：○○×|○○×|⋯○○×

黑母鸡：××○|××○|⋯××○

两只母鸡 3 天生 3 只蛋，平均 1 天 1 只.

前两种情况生 60 只蛋只需要 59 天，后一种情况生 60 只蛋需要 60 天.

故需要 59 天或 60 天.

5．最小的能被 3 整除的两位数是 12，故题述的四位数的前两位数字最小是 12.

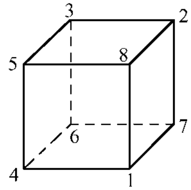
1200 除以 7 的余数为 3，因而当此种四位数的前两位为 12 时，后两位应既能被 5 整除，又被 7 除余 4．经计算这样的两位数最小是 25.

所以，这样的数中最小的一个是 1225.

6．6 个面上所有数字相加，和是$(1+2+3+\cdots+8)\times 3=108$，

由于每个面上数字和相等，每个面上数字和是 $108 \div 6=18$.

具体标法如下图所示.



7．注意 936 中有质因数 13，因此将其分解成两个两位数相乘的形式有 13×72，26×36，39×24，52×18 和 78×12 这 5 种可能．由于两人各抄错了一个数字，因此两人的算式中应该有两个位置上的数字相同．经枚举可知，他们所抄错的算式只可能是(13×72，18×52)，(13×72，12×78)，(26×36，24×39)或(52×18，12×78)．对于第一种情况，两人抄错的是第一个乘数的个位数字和第二个乘数的十位数字，正确的算式为 13×52 或 18×72，后者是 6 的倍数，与题意不符，故原算式应为前者，正确的乘积是 $13\times52=676$．对于后三种情况，通过类似的分析可得出原乘法算式的 $2\times3=6$ 种可能构成，但它们的结果均为 6 的倍数，不合题意．因而所求的数为 676．

8．

一	二	三	四	五	六	日
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

上面的日历不满足题目的条件，将第一天向后错 5 天即满足条件．

一	二	三	四	五	六	日
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

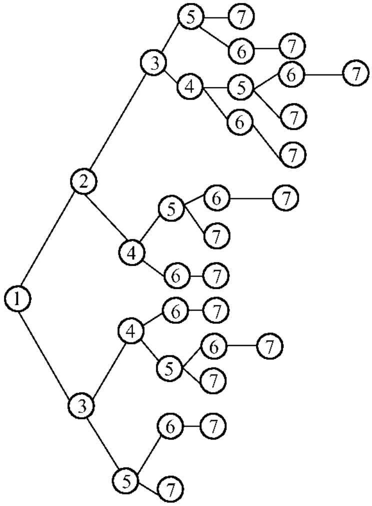
故这个月的第 1 天是星期日，这个月共 31 天．

9．设第一个数是 a，第二个数是 b，则第三、四、五个数依次为 $a+b$，$a+2b$，$2a+3b$，由 $a+2b=4$ 推知，$a=2$，$b=1$．

这一串数是 2,1,3,4,7,11,18,29．

即第七个数是 18．

10．画如下树形图．



每条线代表一步，可知，一共有 13 种走法.

第一学期综合练习题

1．计算 $34\times3535-35\times3434$．

2．下面有两个小数：

$$a=\underbrace{0.00\cdots0}_{1994个0}105,\ b=\underbrace{0.00\cdots0}_{1996个0}19,$$

求 $a+b$，$a-b$，$a\times b$．

3．计算 $345670^2-345669\times345671$．

4．计算 $6.25\times0.16+264\times0.0625+5.2\times6.25+0.625\times20$．

5．计算 $2000\times199.9-1999\times199.8$．

6．算式 $\underbrace{99\cdots9}_{999个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{999个9}+1\underbrace{99\cdots9}_{999个9}$

所得结果的末尾有多少个零?

7．已知一个完全平方数是四位数，且各位数字均小于 7，如果把组成它的数字都加上 3，便得到另一个完全平方数，求原来的四位数．

8．46305 乘一个自然数 A，积是一个完全平方数，问最小的 A 是多少？

9．上体育课时，我们几个同学站成一排，从 1 开始顺序报数，除我以外的其余同学报的数之和减去我报的数恰好等于 50．问:共有多少个同学？我报的数是多少?（**视频**）

10．将 198 张卡片分成两组，每组 99 张，在每组的 99 张卡片上分别写上 1,2,3,4,⋯,99，每次从这两组卡片中分别任意抽取一张，共得到 99 对卡片，计算每对卡片上两个数的和，则这 99 个和的积是奇还是偶?

11．4 个数排成一行，前两个数的平均数是 7，中间两个数的平均数是 2.3，后两个数的平均数是 8.4，问首尾两数的平均数是多少?

12．小强练习掷铅球，投了 5 次，去掉一个最好成绩和一个最差成绩，则平均成绩为 9.73 米；只去掉一个最好成绩，则平均成绩为 9.51 米；只去掉一个最差成绩，则平均成绩为 9.77 米．小强最好成绩与最差成绩相差多少米?

13．把 1,2,3,4,…,198 这 198 个自然数平均分成 3 组，使得这 3 组的平均数相等．求这 3 个平均数的和．

14．摩托车里程表显示的数表示摩托车已经行驶了 24944 千米．经过 2 个小时后，里程表上显示的数字从左到右与从右到左的读数相同．若摩托车的时速不超过 90 千米，那么摩托车在这 2 小时内的平均速度是多少?

15．在一副扑克牌中（去掉大、小王），最少取多少张牌就可以保证其中有 3 张牌的点数相同?

16．在边长为 1 的正方形内随意放进 9 个点，证明其中必有 3 个点构成的三角形的面积不大于$\dfrac{1}{8}$.

17．将 3 盆同样的红花和 4 盆同样的黄花摆放成一排，要求 3 盆红花不相邻，共有多少种不同的放法?

18．A、B 两地相距 203 米，甲、乙、丙的速度分别是 4 米/分钟、6 米/分钟、5 米/分钟．如果甲、乙从 A 地，丙从 B 地同时出发相向而行，那么，在多少分钟后，丙与乙的距离是丙与甲距离的 2 倍?

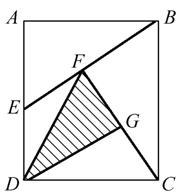
19．有面值为 1 分、2 分、5 分的硬币各 4 枚，用它们去支付 2 角 3 分．问有多少种不同的支付方法?

20．把 14 分拆成若干个自然数的和，再求出这些数的积，要使得到的积最大，应该把 14 如何分拆？这个最大的乘积是多少？

21．把 63 分拆成若干个连续自然数的和，请你写出 5 种不同的分拆．

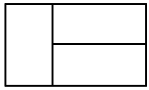
22．从一个正方形木板上锯下宽为 3 厘米的一块长方形木条以后，剩下的面积是 108 平方厘米，问锯下木条的面积是多少?

23．如下图所示，$ABCD$ 是长方形，其中 AB=8 厘米，AE=6 厘米，ED=3 厘米．并且 F 是线段 BE 的中点，G 是线段 FC 的中点．求三角形 DFG（阴影部分）的面积．

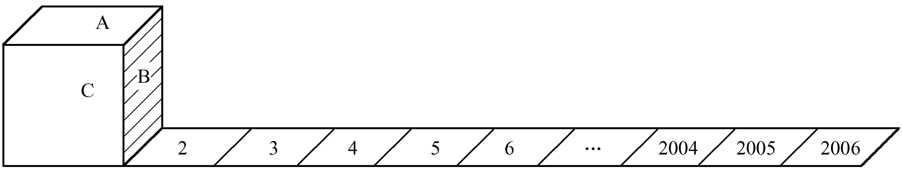


24．如下图所示，3 个小长方形拼成了 1 个面积为 384 平方厘米的大长方

形．那么与大长方形周长相等的正方形的面积为多少平方厘米？



25．在下图中，第一格内放着一个正方体木块，木块 6 个面上分别写着 A、B、C、D、E、F 6 个字母，其中 A 与 D，B 与 E，C 与 F 相对．将木块沿着图中的方格滚动，当木块滚动到第 2006 个格时，木块向上的面写的那个字母是__________．



26．甲、乙、丙、丁约定上午 10 时在公园门口集合．见面后，甲说："我提前了 6 分钟，乙是正点到的．"乙说："我提前了 4 分钟，丙比我晚到 2 分钟．"丙说："我提前了 3 分钟，丁提前了 2 分钟．"丁说："我还以为我迟到了 1 分钟呢，其实我到后 1 分钟才听到收音机报北京时间 10 时整．"

请根据以上谈话分析，这 4 个人中，谁的表最快，快多少分钟？

27．某参观团根据下列条件从 A、B、C、D、E 这 5 个地方中选定参观地点：①若去 A 地，则也必须去 B 地；②B、C 两地中至多去一地；③D、E 两地中至少去一地；④C、D 两地都去或者都不去；⑤若去 E 地，一定要去 A、D 两地．那么参观团所去的地点是哪些？

28．团体游园购买公园门票的票价见下表．今有甲、乙两个旅游团，若分别购票，两团总计应付门票费 1142 元．如合在一起作为一个团体购票，总计支付门票费 864 元．问这两个旅游团各有多少人？

购票人数	50 人以下	51-100 人	100 人以上
每人票价	12 元	10 元	8 元

29．$777^{777}\times 888^{888}\times 999^{999}$ 的尾数是几？

30．设 $n=\underbrace{2\times 2\times 2\cdots\times 2}_{1991个2}$，那么 n 的末两位数字是多少？

第一学期综合练习参考答案

1．题目中的各数都与34和35有直接的关系．

方法1：$34\times3535-35\times3434$

$=34\times(35\times101)-35\times(34\times101)$

$=34\times35\times101-35\times34\times101$

$=0.$

方法2：$34\times3535-35\times3434$

$=34\times(3500+35)-35\times(3400+34)$

$=(34\times3500+34\times35)-(35\times3400+35\times34)$

$=0.$

2．a 是小数点后有 1994+3−1=1996（位）的小数，b 是小数点后有1996+2−1=1997（位）的小数．

a 和 b 小的数点后共有 1996+1997=3993（位）．

$a+b=\underbrace{0.00\cdots0}_{1994\text{个}0}1069$，

$a-b=\underbrace{0.00\cdots0}_{1994\text{个}0}1031$，

$a\times b=\underbrace{0.00\cdots0}_{3990\text{个}0}1995$．

3．原式$=345670^2-(345670-1)\times345671$

$=345670^2-345670\times345671+345671$

$=345670^2-345670\times(345670+1)+345671$

$=345670^2-345670^2-345670+345671$

$=1$．

4．$6.25\times0.16+264\times0.0625+5.2\times6.25+0.625\times20$

$=6.25\times0.16+2.64\times6.25+5.2\times6.25+6.25\times2$

$=6.25\times(0.16+2.64+5.2+2)$

$=6.25\times10$

$=62.5$．

5．$2000\times199.9-1999\times199.8$

$=2000\times199.9-199.9\times1998$

$=199.9\times(2000-1998)$

$=399.8$.

6. $\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}+1\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}$

$=\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}+\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}+1\underbrace{00\cdots0}_{1999个0}$

$=\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}\times(\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}+1)+1\underbrace{00\cdots0}_{1999个0}$

$=\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}\times1\underbrace{00\cdots0}_{1999个0}+1\underbrace{00\cdots0}_{1999个0}$

$=1\underbrace{00\cdots0}_{1999个0}\times(\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}+1)$

$=1\underbrace{00\cdots0}_{1999个0}\times1\underbrace{00\cdots0}_{1999个0}$

$=1\underbrace{00\cdots0}_{3998个0}$.

所以，末尾共 3998 个 0.

7．假设后面一个完全平方数是 A^2，前面一个是 B^2.

按照题意 $A^2-B^2=3333$，因此 A、B 都是两位数.

由 $A^2-B^2=3333$ 推出 $(A+B)\times(A-B)=3333=33\times101$，只有这样的分解才能满足上述 A,B 都是两位数的条件.

因此 $A+B=101, A-B=33$, 所以, $A=67, B=34$.

原来的数为 $B^2=34^2=1156$.

8．$46305=3^3\times5\times7^3$，最小的 $A=3\times5\times7=105$.

9．设我报 x，

所有人报数之和 $-2x=50$．所有人报的数的和为偶数，且大于 50.

$1+2+3+\cdots+10=55$，是奇数，不行.

$1+2+3+\cdots+11=66$，是偶数，$66-2\times8=50$，共 11 人，我报 8.

$1+2+3+\cdots+12=78$，是偶数，但 $78-2\times14=50$，共 12 人，我报 14，矛盾.

所以，共 11 人，我报 8.

10．每组的 99 个数中，有 45 个奇数和 44 个偶数，这两组中分别任取一张，至少有一对卡片两数都是奇数，它们的和必是偶数．所以这 99 个和的积是偶数．

11．依平均数的定义可知，在这 4 个数中，前两个数的和是 $7\times2=14$，后两个数的和是 $8.4\times2=16.8$，中间两个数的和是 $2.3\times2=4.6$．而首尾两数之和加上中间两数之和为全部 4 个数的和，等于前两个数之和加上后两个数之和，于是首尾两数之和为 $14+16.8-4.6=26.2$，平均数是 $26.2\div2=13.1$．

12．$9.77\times4-9.51\times4=1.04$（米）．

小强的最好成绩与最差成绩相差 1.04 米．

13．把 198 个自然数平均分成 3 组，每组 $198\div3=66$（个）数．

每组的平均数是$[(1+2+3+\cdots+198)\div3]\div66$．

则 3 个平均数的和是

$[(1+2+3+\cdots+198)\div3]\div66\times3=(1+2+3+\cdots+198)\div66=298.5$．

14．因为摩托车的时速不超过 90 千米，

$24944+90\times2=25124$．

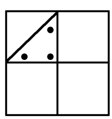
故可由“2 小时后，里程表上显示的数字从左到右与从右到左的读数相同”知里程表上显示的数字前两位是 25，后两位只能是 52，所以里程表上所显示的数字一定是 25052（如果是 25152 则时速超过 90 千米）．

$(25052-24944)\div2=54$(千米/小时)．

15．由于一副扑克牌中共有 4 种花色，且每种花色的牌的点数都是 1~13，所以，要保证其中有 3 张牌的点数相同，最少要取

$13\times2+1=27$（张）．

16．如下图所示，把正方形分成 4 个形状相同、大小相等的正方形．9 个点任意放入这 4 个正方形中．



根据抽屉原理，多于 2×4 个点放入 4 个正方形中，至少有（2+1）个点（即 3 个点）落在某一个正方形之内．现在，特别取出这个正方形来加以讨论．

把落在这正方形中的三点组成的三角形记为$\triangle ABC$，其面积不超过小正方

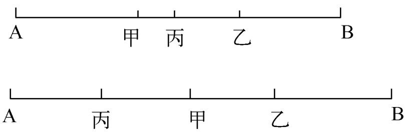
形面积的$\frac{1}{2}$，所以其面积不超过$\frac{1}{8}$．这样就得到了需要证明的结论．

17．4 盒黄花摆放成一排，有 5 个空可供摆放 3 盆红花．即从 5 个位置中选 3 个位置有多少种选法．

共有 10 种不同的选法．

18．设 x 分钟后，丙与乙的距离是丙与甲的距离的 2 倍．

出现两种情况，一个是丙在甲、乙之间，另一个是丙不在甲、乙之间．如下图所示．



列方程：

$2[203-(4+5)x]=(6+5)x-203$，

或 $2[(5+4)x-203]=(5+6)x-203$．

解得 $x=21$，或 $x=29$．

经过 21 分钟或 29 分钟，丙与乙的距离是丙与甲的距离的 2 倍．

19．要付 2 角 3 分钱，最多只能使用 4 枚 5 分币．因为全部 1 分和 2 分币都用上时，共值 12 分，所以最少要用 3 枚 5 分币．

当使用 3 枚 5 分币时，$5\times3=15$，$23-15=8$，所以使用 2 分币最多 4 枚，最少 2 枚，可有

$23=15+(2+2+2+2)$，

$23=15+(2+2+2+1+1)$，

$23=15+(2+2+1+1+1+1)$，

共 3 种支付方法．

当使用 4 枚 5 分币时，$5\times4=20$，$23-20=3$，所以最多使用 1 枚 2 分币，或不使用，从而可有

$23=20+(2+1)$，

$23=20+(1+1+1)$，

共 2 种支付方法．

即总共有 5 种不同的支付方法．

20．我们先考虑分成哪些数时乘积才能尽可能大．

首先，分成的数中不能有 1．

其次，分成的数中不能有大于 4 的数，否则可以将这个数再分拆成 2 与另外一个数的和，这两个数的乘积一定比原数大，例如 7 就比它分拆成的 2 和 5 的乘积小．

再次，因为 $4=2\times2$，故我们可以只考虑将数分拆成 2 和 3．

注意到 $2+2+2=6$，$2\times2\times2=8$；$3+3=6$，$3\times3=9$，因此分成的数中若有三个 2，则不如换成两个 3，换句话说，分成的数中至多只能有两个 2，其余都是 3．

根据上面的讨论，我们应该把 14 分拆成四个 3 与一个 2 之和，即 $14=3+3+3+3+2$，这 5 数的积有最大值．

最大乘积为 $3\times3\times3\times3\times2=162$．

21．我们可考虑先将 63 拆分，然后再调整成连续自然数的和．

（1）拆成 2 个连续自然数的和：$63=31+32$

（2）拆成 3 个连续自然数的和：$63\div3=21$，$63=21+21+21=20+21+22$．

（3）拆成 4 个连续自然数的和：$63\div4=15\cdots\cdots3$，$60=15+15+15+15$，

将剩余的 3 进行分配给两个 15，一个给 1，一个给 2，得 $63=15+15+16+17$

所以 63 不能分成 4 个连续自然数的和．

（4）拆成 5 个连续自然数的和：$63\div5=12\cdots\cdots3$，$60=12+12+12+12+12$，将剩余的 3 分给两个 12，或给 1 个 12：

$63=12+12+12+13+14$，$63=12+12+12+12+15$，无法调整成 5 个连续自然数的和．

（5）拆成 6 个连续自然数的和：$63\div6=10\cdots\cdots3$

$60=10+10+10+10+10+10$，

将剩余的 3 分给 1 个 10：

$63=10+10+10+10+10+13$，可以调整成 6 个连续自然数:

$63=8+9+10+11+12+13$

（6）拆成 7 个连续自然数的和：$63\div7=9$

$63=9+9+9+9+9+9+9=6+7+8+9+10+11+12$

（7）拆成 8 个连续自然数的和：$63\div8=7\cdots\cdots7$

$63=7+7+7+7+7+7+7+14$（将剩下的 7 给最大的数），最大数比最小数大 7，无法调整成 8 个连续自然数．

（8）拆成 9 个连续自然数：$63\div 9=7$.

$63=7+7+7+7+7+7+7+7+7$，最大数比最小数大 8，第一个 7 拿出 4 给最后一个 7，第二个 7 拿出 3 给倒数第 2 个 7，第三个 7 拿出 2 给倒数第三个 7，第四个 7 拿出 1 给倒数第四个 7，

得 $63=3+4+5+6+7+8+9+10+1$.

22．$108=2\times 2\times 3\times 3\times 3=9\times 12$，

由于剩下的长方形的长比宽多 3 厘米，故长为 12 厘米，正方形边长也是 12 厘米.

于是可知锯下木条的面积是 $12\times 3=36$（平方厘米）.

23．梯形 $BCDE$ 的面积为 $[3+(3+6)]\times 8\div 2=48$（平方厘米）.

三角形 BDE 的面积为 $3\times 8\div 2=12$（平方厘米）.

F 是 BE 中点，所以，三角形 DEF 的面积为三角形 BDE 的面积的一半 $=12\div 2=6$（平方厘米）.

三角形 BFC 的面积=三角形 BEC 的面积 $\div 2$=(长方形 $ABCD$ 的面积 $\div 2)\div 2$

$=(6+3)\times 8\div 2\div 2=18$（平方厘米）.

三角形 DCF 的面积=梯形 $BCDE$ 的面积−三角形 DEF 的面积−三角形 BFC 的面积

$=48-6-18=24$（平方厘米）.

所以，三角形 DFG 的面积=三角形 DCF 的面积 $\div 2=24\div 2=12$（平方厘米）.

24．从图中可以看出大长方形的宽既等于小长方形的长，又等于 2 个小长方形的宽，故小长方形的长是宽的 2 倍．依题设，每个小长方形的面积是 $384\div 3=128$（平方厘米），而 $128=(2\times 8)\times 8$，所以小长方形的长和宽分别是 16 厘米和 8 厘米．进而大长方形的长是 $16+8=24$（厘米），宽是 16 厘米，周长为 $(24+16)\times 2=80$（厘米）．与大长方形具有相同周长的正方形边长为 $80\div 4=20$（厘米），面积是 $20\times 20=400$（平方厘米）.

25．因为每滚动 4 格，朝上的面重复出现一次，$2006\div 4=501\cdots 2$，第 2005

格与第 1 格相同，第 2006 格与第 2 格相同，B 面朝下，B 的对面即 E 面向上.

26．注意到丁有标准时间依据，从丁开始推算，各人到达公园的时间见下表.

丁	9:59	乙	9:56
丙	9:58	甲	9:50

甲说提前了 6 分钟，实际上甲提前了 10 分钟，所以甲的表快了 4 分钟，验证为甲的表最快.

27．假设参观团去了 A 地，由①知一定去了 B 地，由②知没去 C 地，由④知没去 D 地，由③知去了 E 地，由⑤知去了 A、D 两地，矛盾.

所以开始的假设不正确，那么参观团没有去 A 地，由①知也没去 B 地，由②知去了 C 地，由④知去了 D 地，因为 A、D 两地没有都去，所以由⑤知没去 E 地.

即参观团去了 C、D 两地.

28．因为 $864>8\times100$，可知两团总人数超过 100 人，因而两团总人数为 $864\div8=108$.

因为 $108\times10=1080<1142$，$108\times12=1296>1142$，所以每个团的人数不会大于 50 人，也不会都小于 50 人，即一个团大于 50 人，另一个团小于 50 人.

当两团都大于 50 人，则分别付款时，应付 $108\times10=1080$ 元，实际多付了 $1142-1080=62$（元）. 这是少于 50 人的旅游团多付的钱.

因此，甲的人数为 $62\div(12-10)=31$（人），乙旅行团人数为 $108-31=77$（人）.

29．$777\div4=194\cdots\cdots1$，$777^{777}$ 的尾数是（7），

$888\div4=222$，888^{888} 的尾数是 6，

$999\div2=499\cdots\cdots1$，$999^{999}$ 的尾数是 9，

$7\times6\times9=378$，$777^{777}\times888^{888}\times999^{999}$ 的尾数是 8.

30．n 是 1991 个 2 的连乘积，可记为 $n=2^{1991}$，首先从 2 的较低次幂入手寻找规律，列表如下：

n	n 的十位数字	n 的个位数字	n	n 的十位数字	n 的个位数字
2^1	0	2	2^3	0	8
2^2	0	4	2^4	1	6

续表

n	n 的十位数字	n 的个位数字	n	n 的十位数字	n 的个位数字
2^5	3	2	2^{14}	8	4
2^6	6	4	2^{15}	6	8
2^7	2	8	2^{16}	3	6
2^8	5	6	2^{17}	7	2
2^9	1	2	2^{18}	4	4
2^{10}	2	4	2^{19}	8	8
2^{11}	4	8	2^{20}	7	6
2^{12}	9	6	2^{21}	5	2
2^{13}	9	2	2^{22}	0	4

观察上表，容易发现自 2^2 开始每隔 20 个 2 的连乘积，末两位数字就重复出现，周期为 20．因为 $1990 \div 20 = 99 \cdots 10$，所以 2^{1991} 与 2^{11} 的末两位数字相同，由上表知 2^{11} 的十位数字是 4，个位数字是 8．所以，n 的末两位数字是 48．

第 15 讲 应用题解法（二）

知识要点

1．消去法

有些应用题里，给出了两个或两个以上未知数量间的关系，要求这些未知量，可以通过比较条件，分析对应的未知条件的变化情况，设法先消去一个未知量，求出剩下的未知量，然后再求出被消去的未知量．这种解题方法叫消去法．

2．置换法

将有数量关系的两种数量转换成一种数量，这是置换法的主要精神．解答置换问题一般用转换和假设这两种数学思维方法．

3．倒推法

有些应用题的解法，通常从题目所叙述的最后结果出发，利用已知条件一步一步向前倒推，直到题目中的问题得到解决．这种方法叫做倒推法或还原法．

经典题再现

20 千克苹果与 30 千克梨共计 132 元，2 千克苹果的价钱与 2.5 千克梨的价钱相等，求苹果和梨的单价．（**视频**）

解：20 千克苹果的价钱+30 千克梨的价钱=132（元），

2 千克苹果的价钱=2.5 千克梨的价钱，

20 千克苹果的价钱=25 千克梨的价钱，

可以将苹果置换成梨．

25 千克梨的价钱+30 千克梨的价钱=132（元），

1 千克梨的价钱=2.4（元），

1 千克苹果的价钱=$(132-30\times2.4)\div20=3$（元）．

答：苹果的单价是 3 元，梨的单价是 2.4 元.

典型例题

【例 1】 体育老师到商店买 6 个足球和 3 个篮球需要付 294 元；买 2 个足球和 3 个篮球需要付 154 元，那么买一个足球和一个篮球各应付多少元？（**视频**）

解：摘录主要条件进行对比：

6 个足球	3 个篮球	付 294 元
2 个足球	3 个篮球	付 154 元

观察数量变化，可清楚地看到，第一次比第二次多付的钱是因为第一次比第二次多买了 4 个足球.

足球的单价为$(294-154)\div(6-2)=140\div4=35$（元），

篮球的单价为$(154-35\times2)\div3=84\div3=28$（元）.

答：买一个足球和一个篮球各付 35 元和 28 元.

【例 2】 如果把例 1 中的第一个条件改为“买 5 个足球和 4 个篮球共需付 287 元”，第二个条件不变，这时应怎样解答？（**视频**）

解：对比已知条件：

5 个足球	4 个篮球	付 287 元
2 个足球	3 个篮球	付 154 元

现在我们没有办法按照上面例题直接计算，但是我们可以从上面例题的解题思路得到启发：在足球或篮球这两个未知条件中，只要有一个未知数的购买数量是相等的，我们就可以进行计算了．所以本题的思路很明确，就是把它转化成形如例 1 的形式.

5×2 个足球	4×2 个篮球	付 287×2 元
2×5 个足球	3×5 个篮球	付 154×5 元

篮球的单价为$(154\times5-287\times2)\div(3\times5-4\times2)=196\div7=28$（元），

足球的单价为$(287-4\times28)\div5=35$（元）.

【例 3】 师徒二人加工一批零件，师傅加工 10 小时，徒弟加工 4 小时，二人共加工了 198 个零件．如果师傅 4 小时的工作量与徒弟 5 小时的工作量相等，那么，他们两人平均每小时各加工多少个零件？（**视频**）

解：根据已知首先把师傅的 10 小时的工作量置换成徒弟的工作量，即

$10\div4\times5=12.5$

所以徒弟每小时加工 198÷(12.5+4)=12（个）.

师傅每小时加工 12×5÷4=15（个）.

答：师傅平均每小时加工 15 个，徒弟平均每小时加工 12 个.

【例 4】 3 堆苹果共 48 个．先从第一堆中拿出与第二堆个数相等的苹果并入第二堆；再从第二堆中拿出与第三堆个数相等的苹果并入第三堆；最后又从第三堆中拿出与这时第一堆个数相等的苹果并入第一堆．这时，3 堆的苹果数恰好相等．原来第一、二、三堆苹果各有多少个?（**视频**）

解：由题意知，最后每堆苹果都是 48÷3=16（个），由此向前逆推，见下表：

	第一堆	第二堆	第三堆
初始状态	8+14=22	28÷2=14	12
第一次变化后	8	16+12=28	24÷2=12
第二次变化后	16÷2=8	16	16+8=24
第三次变化后	16	16	16

答：原来第一、二、三堆分别有 22、14、12 个苹果.

【例 5】 橘子、香蕉各一筐共重 115 千克，苹果、橘子各一筐共重 100 千克，苹果、香蕉各一筐共重 95 千克．橘子、香蕉每筐各重多少千克？

解：方法 1：

$$\begin{array}{rllll} & & \text{1筐橘子} & \text{1筐香蕉} & \to & \text{115千克} \\ & \text{1筐苹果} & \text{1筐橘子} & & \to & \text{100千克} \\ + & \text{1筐苹果} & & \text{1筐香蕉} & \to & \text{95千克} \\ \hline & \text{2筐苹果} & \text{2筐橘子} & \text{2筐香蕉} & \to & \text{310千克} \end{array}$$

310÷2=155（千克），（苹果、橘子、香蕉各 1 筐）

$$\begin{array}{rllll} & \text{1筐苹果} & \text{1筐橘子} & \text{1筐香蕉} & \to \text{155 千克} \\ - & \text{1筐苹果} & \text{1筐橘子} & & \to \text{100 千克} \\ \hline & & & \text{1筐香蕉} & \to \text{55 千克} \end{array}$$

方法 2：

$$\underbrace{\text{橘子}\quad\text{香蕉}}_{\text{115千克}} + \underbrace{\text{苹果}\quad\text{橘子}}_{\text{100千克}} = \text{215千克,}$$

$$215-\underbrace{\text{(苹果+香蕉)}}_{\text{95千克}}=\text{2筐橘子重,}$$

列式(115+100−95)÷2=60（千克），

115−60=55（千克），

答：1 筐橘子 60 千克，1 筐香蕉 55 千克．

【例 6】 甲、乙两个油桶各装了 15 千克油，售货员卖了 14 千克．后来，售货员从剩下较多油的甲桶倒一部分给乙桶，使乙桶油增加一倍；然后从乙桶倒一部分给甲桶，使甲桶油也增加一倍，这时甲桶油恰好是乙桶油的 3 倍．问售货员从两个桶里各卖了多少千克油？（**视频**）

分析：我们先算最后两桶各有多少油，用倒推法解．

解：油的总数为 $15\times2-14=16$（千克），设乙桶油为 1 份，则甲桶油 3 份，共 4 份．

乙桶最后重 $16\div4=4$（千克），甲桶最后重 $4\times3=12$（千克）．

根据题意列表：

	甲　　桶	乙　　桶
最后状态	12	4
乙给甲倒前	6	10
甲给乙倒前	11	5

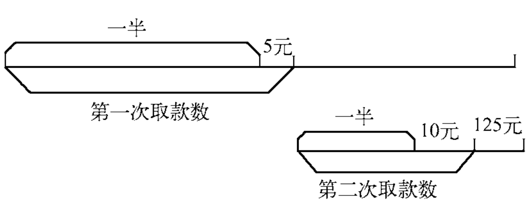
从表中看，甲原来有 11 千克，卖了 4 千克；乙原来有 5 千克，卖了 10 千克．

答：从甲桶卖 4 千克，从乙桶卖 10 千克．

难题精讲

某人去储蓄所取款，第一次取了存款数的一半还多 5 元，第二次取了余下的一半还多 10 元，还剩 125 元．问他原有存款多少元?（**视频**）

解：如下图所示：



第一次取款后余$(125+10)\times 2=270$（元），

原有存款$(270+5)\times 2=550$（元）.

答：他原有存款 550 元.

同步练习

1．4 头牛和 3 匹马每天吃草 90 千克，8 头牛和 2 匹马每天吃草 140 千克．每头牛和每匹马每天各吃草多少千克?

2．某食堂第一次运进大米 5 袋，面粉 7 袋，共重 1350 千克；第二次运进大米 3 袋，面粉 5 袋，共重 850 千克．问一袋大米和一袋面粉各重多少千克?

3．把 300 千克草莓装入大小两种纸箱，大纸箱有 12 个，小纸箱有 18 个，已知每个大纸箱装草莓的重量比每个小纸箱装的 2 倍少 3 千克．问每个小纸箱装草莓多少千克？

4．农民伯伯在自行车两边分别带着 5 只鸡、4 只兔，共重 22 千克，因为兔比鸡重，他把鸡、兔数量互相交换后，两边的重量正好相等．问每只鸡重多少千克?

5．工地用 5 辆大车和 4 辆小车一次共运来水泥 42.5 吨，已知每辆大车比每辆小车多运 4 吨，那么，每辆大车和每辆小车各运来水泥多少吨？

6．用大、小两辆汽车运煤，大汽车运了 9 次，小汽车运了 10 次，一共运了 132 吨，大汽车 3 次运的煤等于小汽车 4 次运的．问大、小汽车的载重量各是多少吨？

7．一个农妇提一筐鸡蛋去卖，第一次卖出一半多半个，第二次又卖出余下的一半多半个，第三次又卖出余下的一半多半个，最后筐内还剩下一个鸡蛋．问筐里原有多少个鸡蛋?（**视频**）

8．一捆电线，第一次用去全长的一半多 3 米，第二次用去余下的一半少 10 米，第三次用去 15 米，最后还剩 7 米．问这捆电线原有多少米?（**视频**）

9．A、B、C 3 个油桶内各盛油若干千克．第一次将 A 桶内的一部分油倒入 B、C 两桶内，使 B、C 两桶内的油增加到原来的 2 倍；第二次从 B 桶把油倒入 A、C 两桶内，使 A、C 两桶内的油增加到第二次倒之前的 2 倍；第三次从 C 桶把油倒入 A、B 两桶，使 A、B 两桶内的油分别增加到第三次倒之前桶内油的 2 倍，这样各桶的油都为 16 千克．问 A、B、C 3 个油桶内原来各有油

多少千克？

10．桌上有 4 堆木棒，分别有 17 根、7 根、6 根和 2 根，现在请你从某一堆中拿出几根到另一堆中，使另一堆的木棒数量增加一倍．这样挪动 4 次后，要使 4 堆木棒的数目相等，应如何移动？

同步练习参考答案

1．(4×2)头牛　　(3×2)匹马　　每天吃草(90×2)千克

　　8　头牛　　　2 匹马　　　每天吃草 140　千克

马每天吃草$(90\times2-140)\div(3\times2-2)=40\div4=10$（千克），

牛每天吃草$(140-10\times2)\div8=120\div8=15$（千克）.

2．大米(5×3)袋　　面粉(7×3)袋　　共重(1350×3)千克

大米(3×5)袋　　面粉(5×5)袋　　共重(850×5)千克

一袋面粉重$(850\times5-1350\times3)\div(5\times5-7\times3)=200\div4=50$(千克)，

一袋大米重$(850-5\times50)\div3=200$(千克).

3．12 大纸箱草莓+18 小纸箱草莓共重 300 千克，

(12×2)小纸箱草莓+18 小纸箱草莓共重$(300+3\times12)$千克，

$(300+3\times12)\div(12\times2+18)=8$（千克）

所以，每个小纸箱装草莓 8 千克.

4．已知：5 只鸡重+4 兔重=22 千克　　①

交换一只鸡和一只兔后，两边重量相等，可以知道：

4 只鸡重+1 只兔重=3 只兔重+1 只鸡重　　②

利用消去法把②式两边同时消去一只鸡和一只兔，得

3 只鸡重=2 只兔重　　③

3 只鸡的重量等于 2 只兔的重量，则 4 只兔的重量等于 6 只鸡的重量．把①式中的“4 只兔”用“6 只鸡”来替换，可得 22 千克，相当于（5+6）只鸡的重量，可以求出每只鸡重 $22\div11=2$（千克）.

所以，每只鸡重 2 千克.

5．题目中有两个未知数，解答起来有一定困难．但运用替换方法，把 4 辆小车换成大车，题目的解答就变得比较容易.

设每辆小车都多运 4 吨，那么小车运的吨数就和大车同样多了（也就是将小车都转换为大车了）.

这时，4 辆小车就会共增加运量 $4\times4=16$（吨），

总共运的吨数就会增加到 $42.5+16=58.5$（吨）.

这 58.5 吨便是(5+4)辆大车运的水泥数.

所以，每辆大车运来的水泥是

$58.5\div(5+4)=58.5\div9=6.5$（吨）.

每辆小车运来的水泥是 $6.5-4=2.5$（吨）.

显然，将大车转换为小车（即将小车去替换大车解题），也是可以的.

6．题目中“132 吨”是由两辆大小不同的汽车运的，通过大、小汽车之间的关系，把“两辆”转化成“一辆”，问题便容易解决.

大汽车 3 次的运量等于小汽车 4 次的运量，那么大汽车 9 次的运量就等于小汽车 12 次的运量.

即大汽车 3 次的运量=小汽车 4 次的运量，

大汽车 9 次的运量+小汽车 10 次的运量=132（吨）.

小汽车 12 次的运量+小汽车 10 次的运量=132（吨）.

这 132 吨相当于小汽车（12+10）22 次的运量.

小汽车每次运 $132\div(12+10)=6$（吨），

大汽车每次运 $6\times4\div3=8$（吨）.

即大汽车每次运 8 吨，小汽车每次运 6 吨.

7．$(1+0.5)\times2=3$（个），

$(3+0.5)\times2=7$（个），

$(7+0.5)\times2=15$（个）.

8．第二次用后余 $15+7=22$（米）；

第一次用后余 $(22-10)\times2=24$（米）；

这捆电线原有 $(24+3)\times2=54$（米）.

9．见下表.

	A	B	C
第三次倒后	16	16	16
第二次倒后	$16\div2=8$	$16\div2=8$	$16+8+8=32$
第一次倒后	$8\div2=4$	$8+4+16=28$	$32\div2=16$
原来	$4+14+8=26$	$28\div2=14$	$16\div2=8$

10．4 堆木棒共 32 根，挪动 4 次后每堆有 8 根．

	第一堆	第二堆	第三堆	第四堆
最后	8	8	8	8
倒数第一次	8	8	12	4
倒数第二次	8	14	6	4
倒数第三次	15	7	6	4
原来	17	7	6	2

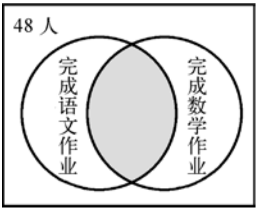
从下往上看则得到挪动方法．

第 16 讲　包含与排除

知识要点

在计数时，必须注意无一重复，无一遗漏，为使重叠部分不被重复计算，人们研究出一种新的计数方法．这种方法的基本思想是：先不考虑重叠的情况，把包含于某内容中的所有对象数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排斥出去，使得计算结果既无遗漏又无重复，这种计数的方法叫容斥原理．

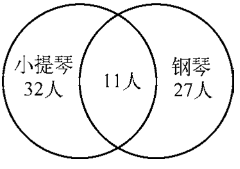
如下图所示，全班同学都包含在长方形中．左边圆代表完成语文作业的人；右边圆代表完成数学作业的人；阴影部分代表两种作业都完成的人，这正好是两圆重叠的部分．而圆圈外，长方形内的人数是两门课都未完成的人数．



经典题再现

某校艺术团的小演奏家们，每人都至少会演奏小提琴和钢琴中的一种．他们中有 32 人会拉小提琴，27 人会弹钢琴，两种都能演奏的有 11 人．这个团共有多少个小演奏家?（**视频**）

分析：如下图所示，我们看到，要求的实际上是两个圆内所代表的人数．将 32 人与 27 人相加，重叠部分的 11 人被加了两次，要减去一次．



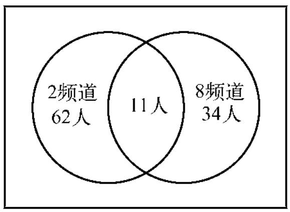
解：32+27−11=48（人）.

答：这个团共有小演奏家 48 人.

典型例题

【例 1】 电视台向 100 人调查昨天收看电视的情况，有 62 人看过 2 频道，34 人看过 8 频道，11 人两个频道都看过．问两个频道都没看过的有多少人？（视频）

分析：如下图所示，我们要求的是长方形内、圆圈外的人数．将包含在长方形内的人排除掉圆圈内的人，这正是包含与排除的含义.



解：在排除圆圈内的人数时，会将重叠部分的 11 人减去两次，还要注意再加回来一次.

100−62−34+11=15（人）.

答：两个频道都没看过的有 15 人.

【例 2】 育才小学举行小学生画展，其中 18 幅不是六年级的，22 幅不是五年级的，现在知道五、六年级共展出 24 幅画，问其他年级共展出多少幅画？（视频）

解：根据条件可知，18 幅加上六年级的幅数就是画展总幅数，22 幅加上五年级的幅数也是画展总幅数，五、六年级共展出 24 幅画，所以 18+22+24=64（幅）是画展总幅数的 2 倍，其他年级共展出的画是

$(18+22+24)\div 2-24=8$（幅）.

答：其他年级共展出 8 幅画.

【例 3】 在 1～100 的自然数中是 5 的倍数或是 7 的倍数的数有多少个？（视频）

解：从 1 到 100 的自然数中，5 的倍数有 20 个，7 的倍数有 14 个，既

是 5 的倍数又是 7 的倍数的有 2 个，即 35 和 70，这两个数分别计在 5 的倍数和 7 的倍数中，所以应将它们的个数排除.

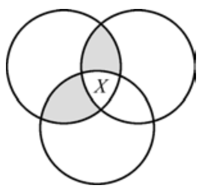
这样 5 的倍数或 7 的倍数的个数=（5 的倍数的个数）+（7 的倍数的个数）-（5 和 7 的倍数的个数）=20+14-2=32（个）.

答：这样的数有 32 个.

【例 4】 有 3 个面积均为 20 平方厘米的圆，其两两相交部分的面积分别为 5,6,7 平方厘米，3 圆相交部分的面积为 3 平方厘米．那么 3 圆共盖住部分的面积是多少平方厘米?（**视频**）

解：如下图所示，3 个圆两两部分重叠，三个圆也有重叠，求面积时，将 3 个圆面积相加，两两重叠部分都被加了 2 次，要减去一次．而 3 圆重叠部分包含在 3 个两两重叠的部分中，减去时，又被减了 3 次.

即 20+20+20-5-6-7 中，X 部分在 3 个 20 中被加了 3 次，又在 5、6、7 中被减了 3 次．这样，X 部分并没有算在整个面积当中．最后还是要加上一次.

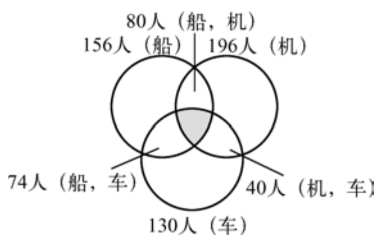


解：$20\times 3-5-6-7+3=45$（平方厘米）.

答：3 圆共盖住的面积是 45 平方厘米.

【例 5】 城中小学的 318 名学生到“儿童乐园”活动．其中参加划船的有 156 人，乘电动飞机的有 196 人，坐碰碰车的有 130 人，既参加划船又坐碰碰车的有 74 人，既参加划船又乘电动飞机的有 80 人，既乘电动飞机又坐碰碰车的有 40 人．3 种活动都参加的有多少人?（**视频**）

解：根据题意画出下图.



阴影部分表示 3 种活动都参加的人数．3 种活动都参加的人数是

318−(156+196+130−80−40−74)=318−288=30（人）．

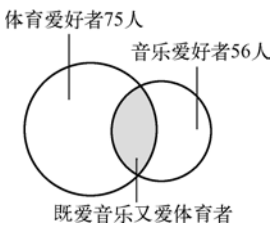
答：3 种活动都参加的有 30 人．

难题精讲

1．在 100 个学生中，音乐爱好者有 56 人，体育爱好者有 75 人，那么既爱好音乐又爱好体育的人最少有多少人？最多有多少人？（**视频**）

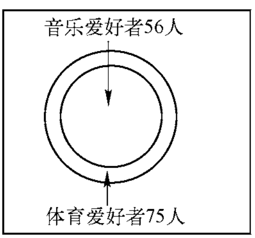
分析：总人数是固定的．当 100 人都或是音乐爱好者，或是体育爱好者时，圆圈外无人，重叠部分达到最小值．

解：如下图所示．



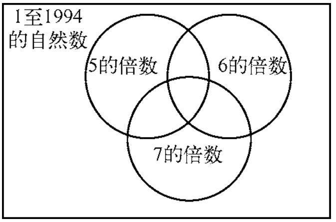
56+75−100=31（人）．

如果 100 名学生中还有若干人两者都不爱好时，那么两者都爱好的人数就比 31 人多，当两圆完全重叠时，两者都爱好的人数最多，其最多可达 56 人．圆圈外为两种都不爱好的，共 100−75=25（人）．如下图所示．



2．求从 1 到 1994 中不能被 5 整除，也不能被 6 或 7 整除的自然数的个数．（**视频**）

解：如下图所示，1~1994 的自然数在一个方框中，其中 5 的倍数，6 的倍数，7 的倍数分别在 3 个圆圈中．求出每个圆圈中数的个数，再求出它们两两重叠和 3 个重叠部分的个数．



在 1~1994 中，能被 5 整除的个数为 1994÷5=398……4，共 398 个；

能被 6 整除的个数为 1994÷6=332……2，共 332 个；

能被 7 整除的个数为 1994÷7=284……6，共 284 个；

能被 5×6=30 整除的个数为 1994÷30=66……14，共 66 个；

能被 5×7=35 整除的数为 1994÷35=56……34，共 56 个；

能被 6×7=42 整除的个数为 1994÷42=47……20，共 47 个；

能被 5×6×7=210 整除的个数为 1994÷210=9……104，共 9 个．

根据容斥原理，1~1994 中或能被 5，或能被 6，或能被 7 整除的数的个数为(398+332+284)−(66+56+47)+9=854（个），不能被 5 整除，也不能被 6 或 7 整除的自然数的个数为 1994−854=1140（个）．

同步练习

1．某区有 100 个外语教师懂英语或俄语，其中懂英语的 75 人，既懂英语又懂俄语的 20 人，那么懂俄语的教师有多少人?（**视频**）

2．36 个学生在回答两个问题时，答对第一题的 23 人，答对第二题的 25 人．两题都答对的有 14 人，两题都没有答对的有多少人?

3．某班共有 54 名学生，其中参加语文竞赛的有 28 人，参加数学竞赛的有 27 人，两科都没有参加的有 20 人，那么同时参加语文、数学两科竞赛的有多少人?

4．全班 46 名学生中，仅会打乒乓球的有 28 人，既会打乒乓球，又会打羽毛球的有 10 人．这两项都不会的有 6 人．求仅会打羽毛球的有多少人?

5．某校有 500 名学生报名参加学科竞赛，数学竞赛参加者共 312 名，作

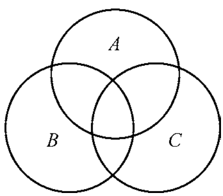
文竞赛参加者共 353 名，其中这两科都参加的有 292 名，那么，这两科都没有参加的有多少人?

6．在 1 至 10000 中不能被 5 或 7 整除的数共有多少个?

7．在一次考试中，某班数学得 100 分的有 17 人，语文得 100 分的有 13 人，两科都得 100 分的有 7 人，那么两科中至少有一科得 100 分的共有多少人？全班 45 人中两科都不得 100 分的有多少人?

8．某进修班有 50 人，开甲、乙、丙 3 门选修课．选修甲课的有 38 人，选修乙课有的 35 人，选修丙课的有 31 人，兼选甲、乙两门课的有 29 人，兼选甲、丙两门课的有 28 人，兼选乙、丙两门课的有 26 人，甲、乙、丙 3 门课均选的有 24 人．问 3 门课均未选的是多少人?

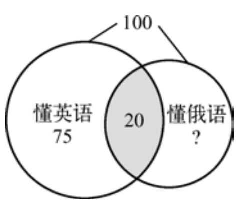
9．在桌面上放置着 3 个两两重叠的圆纸片，如下图所示，它们的面积都是 100 平方厘米，并知 A、B 两圆重叠的面积是 20 平方厘米，A、C 两圆重叠的面积为 45 平方厘米，B、C 两圆重叠面积为 31 平方厘米，3 个圆共同重叠的面积为 15 平方厘米，求盖住桌子的总面积是多少平方厘米?



10．64 人订 A、B、C 3 种杂志．订 A 种杂志的有 28 人，订 B 种杂志的有 41 人，订 C 种杂志的有 20 人，订 A、B 两种杂志的有 10 人，订 B、C 两种杂志的有 12 人，订 A、C 两种杂志的有 12 人．问 3 种杂志都订的有多少人?

同步练习参考答案

1．如下图所示．



懂俄语的教师有 100−(75−20)=45（人）.

2．至少答对一道题的同学有 23+25−14=34（人），

两题都没有对的同学有 36−34=2（人）.

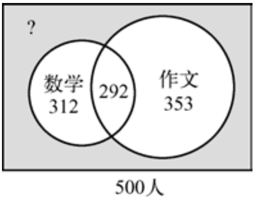
3．至少参加一科竞赛的人数为 54−20=34（人），

两科竞赛都参加的人数为 28+27−34=21（人）.

4．至少会打一种球的人数为 46−6=40（人），

仅会打羽毛球的人数为 40−(28+10)=2（人）.

5．如下图所示.



两科都没有参加的有 500−(312+353−292)=127（人）.

6．1 到 10000 中，能被 5 整除的有 10000 ÷ 5=2000（个）；

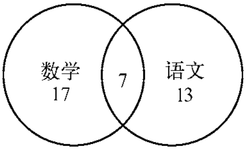
能被 7 整除的有 10000 ÷ 7=1428……4，1428 个；

能被 35 整除的有 10000 ÷ (5 × 7)=285……26，共 285 个；

即能被 5 或 7 整除的共有 2000+1428−285=3143（个）.

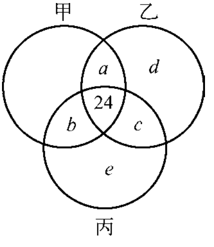
所以，不能被 5 或 7 整除的有 10000−3143=6857（个）.

7．如下图所示.



至少一科得 100 分的有 17+13−7=23（人），

两科都不得 100 分的有 45−23=22（人）.



8．设仅选甲、乙的有 a 人，仅选甲、丙的有 b 人，仅选乙、丙的有 c 人，仅选乙的有 d 人，仅选丙的有 e 人．如右图所示.

则 a=29−24=5（人），

b=28−24=4（人），

$c=26-24=2$（人），

$d=35-24-a-c=4$（人），

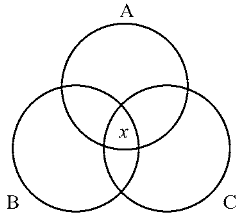
$e=31-24-b-c=1$（人）．

所以，至少选一科的人数=选甲的人数$+d+c+e=45$（人），

3 门课均未选的人数为 $50-45=5$（人）．

9．由容斥原理知，盖住桌面的总面积为 $100+100+100-(20+45+31)+15=219$（平方厘米）．

10．如下图所示．设 3 种杂志均订的人数为 x，则有 $28+41+20-10-12-12+x=64$，解得 $x=9$，即 3 种杂志都订的有 9 人．



第17讲 面积计算

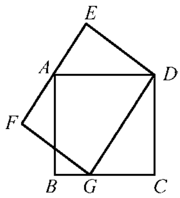
知识要点

长方形、正方形、三角形、平行四边形和梯形是我们在小学阶段学习的规则图形，其面积计算公式是我们熟悉的内容．这一讲我们重点学习组合图的面积计算．

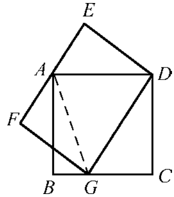
组合图是指将若干规则图形拼接在一起所构成的图形．一般我们是通过对规则图形的计算，来求题目中不规则图形的面积，这需要一定的转换技巧．必要时要填加辅助线，或设定未知数列方程解决．

经典题再现

如下图所示，正方形 $ABCD$ 的边长是 4 厘米，长方形 $DEFG$ 的长 $DG=5$ 厘米，问长方形的宽 DE 为多少厘米？（**视频**）



分析：一般来讲，所求长方形的宽边要放在三角形中，利用三角形的面积解决．DE 在三角形 ADE 中，但这个三角形只知道 $AD=4$ 厘米，条件不够，无法求出 DE．所以，本题一定要添加辅助线．如下图所示．



解：作辅助线 AG，我们得到新的三角形 ADG，这个三角形的面积可以按两种方法计算：以 AD 为底，高也是正方形边长，所以面积可求.

另一方面，以 DG 为底，从 A 点向 DG 做垂线，为高，这个高正好是长方形的宽，利用刚才求出的面积就可以求出高，即长方形的宽.

三角形 ADG 的面积 $=4\times4\div2=8$（平方厘米）.

另一方面，三角形 ADG 的面积 $=DG\times$高$\div2=5\times$高$\div2$，即

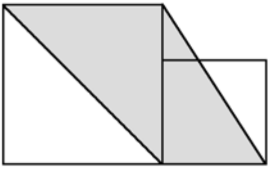
$8=5\times$高$\div2$，

高 $=8\times2\div5=3.2$（厘米）. 即 $DE=3.2$.

所以，长方形 $DEFG$ 的宽 DE 是 3.2 厘米.

典型例题

【例 1】 如下图所示，大正方形的边长为 4 厘米，阴影部分面积为 14 平方厘米，小正方形的边长为多少厘米？**（视频）**



解：阴影是梯形，面积为

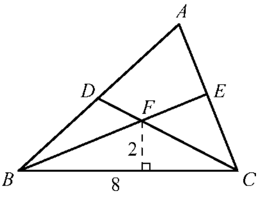
(4+小正方形边长)$\times4\div2=14$（平方厘米），

即 4+小正方形边长 $=14\div2$，

小正方形边长 $=7-4=3$（厘米）.

答：小正方形的边长为 3 厘米.

【例 2】 如下图所示，D,E 分别是所在边的中点，求四边形 $ADFE$ 的面积.**（视频）**

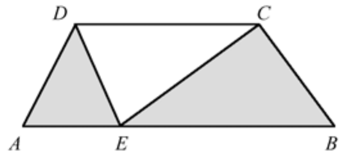


解：三角形 ACD 的面积＝三角形 BCE 的面积＝三角形 ABC 面积的一半，去掉公共部分三角形 CEF 的面积，剩下的面积相等，即

四边形 $ADEF$ 的面积＝三角形 BCF 的面积$=8\times 2\div 2=8$.

答：四方形 $ADFE$ 的面积为 8.

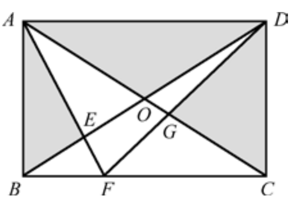
【例 3】 如下图所示，梯形的下底 AB 长为 8 厘米，高为 4 厘米，阴影部分面积是多少平方厘米？（**视频**）



解：阴影面积$=\frac{1}{2}\times AE\times 4+\frac{1}{2}\times EB\times 4=\frac{1}{2}\times(AE+EB)\times 4=\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$（平方厘米）.

答：阴影部分的面积是 16 平方厘米.

【例 4】 如下图所示，在长方形 $ABCD$ 中，$AD=15$ 厘米，$AB=8$ 厘米，图中阴影部分的面积是 68 平方厘米，求四边形 $EFGO$ 的面积.（**视频**）



解：因为三角形 ABD 与三角形 ADF 同底等高，所以面积相等．减去共同的部分三角形 ADE 的面积，剩余部分的面积相等．所以有

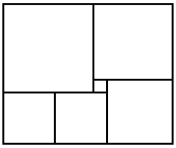
三角形 ABE 的面积＝三角形 DEF 的面积.

我们将阴影三角形 ABE 移至三角形 EFD 后发现，整个阴影面积减去三角形 ACD 面积即是四边形 $EFGO$ 面积.

四边形 $EFGO$ 的面积$=68-15\times 8\div 2=8$（平方厘米）.

答：四边形 $EFGO$ 的面积为 8 平方厘米.

【例 5】 如下图所示，一个长方形，恰好能分成 6 个正方形，其中最小的正方形的面积是 1 平方厘米，求这个长方形的面积.（**视频**）



解：设最大的正方形的边长为 x，则其余的正方形边长分别是

$x-1$，$x-2$，$x-3$.

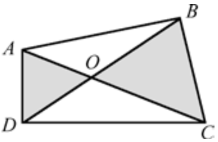
$x+(x-1)=(x-2)+(x-3)+(x-3)$，

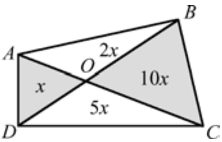
$x=7$.

所以长方形的长为 $7+(7-1)=13$（厘米），宽为 $7+(7-3)=11$（厘米），

则长方形的面积为 $13\times 11=143$（平方厘米）.

【例 6】 如下左图所示，已知 $BO=2\times DO$，$CO=5\times AO$，阴影部分的面积和是 11 平方厘米，求四边形 $ABCD$ 的面积.（**视频**）





分析：由 $BO=2\times DO$ 知三角形 AOB 的面积是三角形 AOD 面积的 2 倍（高相同）.

同理，三角形 BOC 的面积是三角形 COD 面积的 2 倍.

由 $CO=5\times AO$，三角形 COD 面积是三角形 AOD 面积的 2 倍.

解：设三角形 AOD 面积为 x. 则四边形 $ABCD$ 被对角线分成的 4 份分别为 x，$2x$，$5x$，$10x$，如上右图所示.

$x+10x=11x$ 是阴影部分的面积，因已知其面积为 11，所以 $x=1$，

$ABCD$ 面积 $=x+5x+2x+10x=18x=18$（平方厘米）.

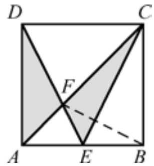
答：四边形 $ABCD$ 的面积为 18 平方厘米.

难题精讲

正方形 $ABCD$ 的面积是 6 平方厘米，E 为 AB 边中点，求阴影部分的面

积.（**视频**）

解：利用 E 是中点可知三角形 ADE 和三角形 ACE 的面积是正方形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$．但是，不知道三角形 AEF 的面积，不可能求出阴影部分的面积．所以，连接 BF，可以再一次利用 E 是中点．如下图所示．



三角形 AEF 与三角形 BEF 的面积相等．两块阴影的面积都是 $ABCD$ 的面积减去三角形 AEF 的面积，所以，两块阴影面积相等．

因为 E 是中点，三角形 AEF 面积三角形 BEF 面积相等，设为 x．

沿对角线 AC 折叠，三角形 ADF 与三角形 ABF 重合，所以，一块阴影面积等于 $2x$．

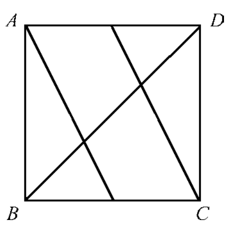
三角形 ADE 的面积 $=3x$．

又，三角形 ADE 的面积 $=6\div4=1.5$，所以，$x=1.5\div3=0.5$．

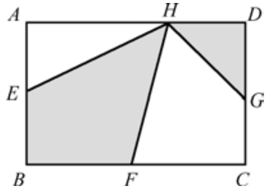
整个阴影的面积 $=4x=4\times0.5=2$（平方厘米）．

同步练习

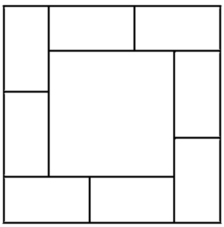
1．如下图所示，正方形 $ABCD$ 的一条对角线 BD 被过 DA 和 BC 的两条平行线分成长都是 1 厘米的 3 部分，求这个正方形 $ABCD$ 的面积．



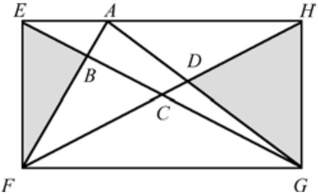
2．如下图所示，长方形 $ABCD$ 的面积为 36 平方厘米．E,F,G 为所在边的中点，H 为 AD 边上任意一点，问阴影部分的面积是多少平方厘米？（**视频**）



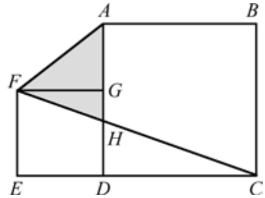
3．用同样的长方形条砖，在一丛花的周围镶成一个正方形边框，如下图所示．边框的外周长为 264 厘米，里面小正方形的面积为 900 平方厘米，问每块长方形条砖的长与宽各是多少厘米？（**视频**）



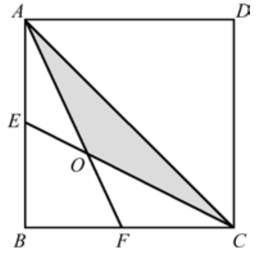
4．下图中长方形的长宽分别为 6 厘米和 4 厘米，阴影部分的面积和为 10 平方厘米，求四边形 $ABCD$ 的面积．（**视频**）



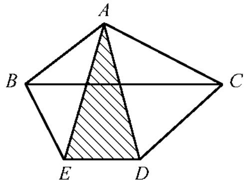
5．如下图所示，四边形 $ABCD$ 和四边形 $DEFG$ 都是正方形，已知三角形 AFH 的面积是 7 平方厘米．三角形 CDH 的面积是多少平方厘米？（**视频**）



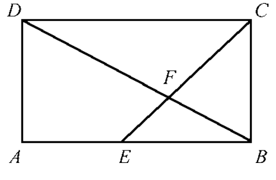
6．如下图所示，E 和 F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB 和 BC 的中点，正方形的面积为 16 平方厘米．求阴影部分的面积．



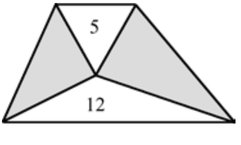
7．如下图所示，已知三角形 ABC 的面积为 2 平方厘米，梯形 $BCDE$ 的面积是 6 平方厘米，并且上底 BC 是下底 DE 的 2 倍．求三角形 ADE 的面积．



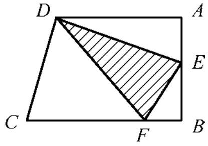
8．E 是长方形 $ABCD$ 的边的中点，CE 和 BD 交于 F．如果三角形 EBF 的面积是 1 平方厘米，那么长方形 $ABCD$ 的面积是多少平方厘米？



9．如下图所示，在一个梯形内有上下两个三角形，它们的面积分别是 5 平方厘米和 12 平方厘米．已知梯形的下底是上底的 3 倍，那么图中阴影部分的面积是多少？（**视频**）



10．如下图所示，$ABCD$ 是直角梯形．其中 $AD=12$ 厘米，$AB=8$ 厘米，$BC=15$ 厘米，且三角形 ADE 、四边形 $DEBF$、三角形 CDF 的面积相等．问三角形 EDF（阴影部分）的面积是多少平方厘米？

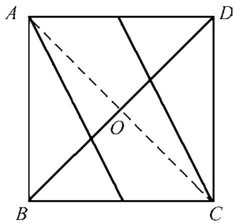


同步练习参考答案

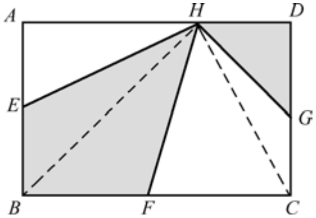
1．连 AC，AC 与 BD 互相垂直平分．$OD=1+0.5=1.5$（厘米），

三角形 AOD 的面积 $=1.5\times1.5\div2=1.125$（平方厘米）．

正方形 $ABCD$ 的面积 $=1.125\times4=4.5$（平方厘米）．



2．如下图所示，连接 BH，CH．



三角形 AEH 的面积 $=$ 三角形 BEH 的面积，三角形 BFH 的面积 $=$ 三角形 CFH 的面积，三角形 CGH 的面积 $=$ 三角形 DGH 的面积．

所以，阴影部分的面积 $=$ 长方形的面积 $\div2=36\div2=18$（平方厘米）．

3．外框正方形的边长是 $264\div4=66$（厘米），

里边小正方形的边长是 30 厘米，所以，

长×2+宽=66，长×2－宽=30.

长×4=66+30，宽×2=66－30，长=24 厘米，宽=18 厘米.

即长方形条砖的长为 24 厘米，宽为 18 厘米.

4．由于 $S_{\triangle EFC}+S_{\triangle GCH}$=长方形面积的一半$=4\times6\div2=12$（平方厘米）

所以 $S_{\triangle BFC}+S_{\triangle CDG}=12-10=2$（平方厘米）.

又因为 $S_{\triangle ABG}=S_{\triangle EFB}$，$S_{\triangle ADF}=S_{\triangle DGH}$.

所以 $S_{\triangle ABG}+S_{\triangle ADF}=S_{\triangle EFB}+S_{\triangle DGH}=10$（平方厘米）

所以四边形 $ABCD$ 的面积＝ $(10-2)\div2=4$（平方厘米）.

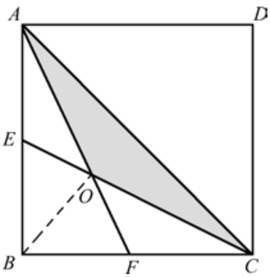
5．设大正方形的边长为 a，小正方形的边长为 b.

梯形 $EFAD$ 的面积是$(a+b)\times b\div2$，

三角形 EFC 的面积也是$(a+b)\times b\div2$，

所以三角形 CDH 的面积=三角形 AFH 的面积=7（平方厘米）.

6．由于 E 和 F 都是中点，所以，三角形 AOE,BOE,BOF,COF 的面积相等.



设 AOE 的面积为 x，则 $3x$=正方形 $ABCD$ 的面积$\div4=16\div4=4$，

所以，$x=\frac{4}{3}$，阴影部分面积$=16\div4-x=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$（平方厘米）.

7．设 $DE=x$，$BC=2x$，则三角形 ABC 的面积$=2x\times$三角形 ABC 的高$\div2=2$（平方厘米）.

梯形 $BCDE$ 的面积$=(x+2x)\times$梯形 $BCDE$ 的高$\div2=3x\times$梯形 $BCDE$ 的高$\div2=6$（平方厘米），

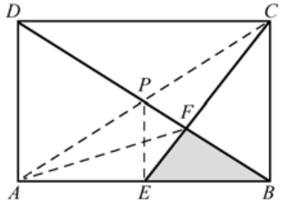
$x\times$三角形 ABC 的高$=2$，

$x\times$梯形 $BCDE$ 的高$=4$，

$x\times$(三角形 ABC 的高+梯形 $BCDE$ 的高)$=6$，

$x\times$(三角形 ABC 的高+梯形 $BCDE$ 的高)$\div2=3$

8．如下图所示，连接 AC 交 BD 于 P，连接 PE.



由于 P 和 E 都是中点，所以四边形 $PEBC$ 是梯形.

所以，三角形 PCF 的面积 = 三角形 BEF 的面积 = 1.

又因为，三角形 APF 的面积 = 三角形 PCF 的面积，

三角形 AEF 的面积 = 三角形 BEF 的面积.

所以，三角形 ACE 的面积 $=3\times1=3$（平方厘米）.

长方形 $ABCD$ 的面积 $=4\times$ 三角形 ACE 的面积 $=4\times3=12$（平方厘米）.

9．设上底为 x，则下底为 $3x$. 所以，

面积为 5 的三角形的高 $=5\times2\div x$，面积为 12 的三角形的高 $=12\times2\div(3x)$.

所以，梯形的高 $=5\times2\div x+12\times2\div3x$.

梯形的面积 $=(x+3x)\times(5\times2\div x+12\times2\div3x)\div2=36$（平方厘米）.

阴影部分的面积 $=36-5-12=19$（平方厘米）.

10．梯形 $ABCD$ 的面积为 $(12+15)\times8\div2=108$（平方厘米），

三角形 ADE 、四边形 $DEBF$ 、三角形 CDF 的面积均为 $108\div3=36$（平方厘米）.

三角形 CDF 的面积 $=CF\times AB\div2$，

所以， $CF=2\times36\div8=9$ （厘米），$BF=15-9=6$（厘米）.

同理，$AE=2\times36\div12=6$（厘米），$BE=8-6=2$（厘米）.

所以，三角形 BEF 的面积 $=6\times2\div2=6$（平方厘米）.

故，三角形 DEF 的面积 $=36-6=30$（平方厘米）.

第 18 讲 进位制

知识要点

十进制是最常见的进位制，我们平时使用的数大部分是十进制．但其他进位制也在实际生活中经常遇到．例如，每 7 天为一星期，这是 7 进制；每 12 个月为一年，这是 12 进制；每 60 秒为 1 分，这是 60 进制．

1．二进制的四则运算

二进制就是“逢二进一，借一当二”的记数方法，它只使用 0，1 两个数码．例如，二进制中，$1+1=10$（因为逢二要进 1 写 0）$1+11=100$．为了区别十进制的 100，我们写成$(100)_2$．

下面我们对比一下十进制数与二进制数：

十进制：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
二进制：	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100

规律：	十进制	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
	二进制	10	100	1000	10000	100000

2．二进制（*k* 进制）与十进制的互化

（1）二进制转十进制：（视频）

根据 10,100,1000 等可以转成 2,4,8,…可以总结二进制转十进制的方法．

例如：$(10111)_2=(10000+100+10+1)_2=(2^4+2^2+2^1+1)_{10}=(1\times2^4+0\times2^3+1\times 2^2+1)_{10}=(16+4+2+1)_{10}=(23)_{10}$

将 2 改为 k，即是 k 进制化十进制的方法．

（2）十进制转二进制：（视频）

十进制的 23 怎么转成二进制？同学们注意我们只要将它写成 2^k 形式就好转了．

$23=2\times11+1=2\times(2\times5+1)\ +1=2\times[2\times(2\times2+1)+1]+1$

$=2^4+2^2+2^1+1$，

转成二进制：$10000+100+10+1=10111$.

总结成规律：除 2 取余，依次倒写：

$$\begin{array}{rll} 2\,| & 23 & \cdots\ 1 \\ 2\,| & 11 & \cdots\ 1 \\ 2\,| & 5 & \cdots\ 1 \\ 2\,| & 2 & \cdots\ 0 \\ 2\,| & 1 & \cdots\ 1 \\ & 0 & \end{array}$$

即将 23 不断除以 2，直到商为 0．将每次的余数倒写即是二进制数.

将上面的过程改为除 k 取余依次倒写，即是十进制化 k 进制的方法.

经典题再现

计算：

（1）$(1011)_2+(1001)_2$；　　（2）$(101)_2-(11)_2$；

（3）$(10101)_2\times(11)_2$；　　（4）$(10100010)_2\div(1001)_2$.（**视频**）

说明：二进制数的四则运算法则和十进制的运算法则基本相同，不同的是：（1）加法进位“逢二进一”；（2）减法借位“借一当二”.

解：竖式计算.

（1）

$$\begin{array}{r} 1011 \\ +\ 1001 \\ \hline 10100 \end{array}$$

（2）

$$\begin{array}{r} 101 \\ -\ \ 11 \\ \hline 10 \end{array}$$

（3）

$$\begin{array}{r} 10101 \\ \times\quad\ 11 \\ \hline 10101 \\ 10101 \\ \hline 111111 \end{array}$$

（4）

$$\begin{array}{r} 10010 \\ 1001\overline{)10100010} \\ \underline{1001} \\ 1001 \\ \underline{1001} \\ 0 \end{array}$$

即（1）$(1011)_2+(1001)_2=10100$.　　（2）$(101)_2-(11)_2=10$.

（3）$(10101)_2\times(11)_2=111111$.　　（4）$(10100010)_2\div(1001)_2=10010$.

典型例题

【例 1】 把下面的二进制数化为十进制数.

（1）$(10111)_2$；　（2）$(110011)_2$；　（3）$(1001)_2$；　（4）$(10011101)_2$.

解：（1）$(10111)_2=1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1$

$=16+4+2+1$

$=(23)_{10}$.

（2）$(110011)_2=1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1$

$=32+16+2+1$

$=(51)_{10}$.

（3）$(1001)_2=1\times2^3+1$

$=8+1$

$=(9)_{10}$.

（4）$(10011101)_2=1\times2^7+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1$

$=128+16+8+4+1$

$=(157)_{10}$.

【例 2】 把下面十进制数化为二进制数.

（1）$(23)_{10}$；　　（2）$(74)_{10}$；　　（3）$(55)_{10}$.

解：如下：

（1）

$$\begin{array}{r|l l}
2 & \underline{23} & \cdots 1 \\
2 & \underline{11} & \cdots 1 \\
2 & \underline{5} & \cdots 1 \\
2 & \underline{2} & \cdots 0 \\
2 & \underline{1} & \cdots 1 \\
 & 0 &
\end{array}\ \uparrow$$

（2）

$$\begin{array}{r|l l}
2 & \underline{74} & \cdots 0 \\
2 & \underline{37} & \cdots 1 \\
2 & \underline{18} & \cdots 0 \\
2 & \underline{9} & \cdots 1 \\
2 & \underline{4} & \cdots 0 \\
2 & \underline{2} & \cdots 0 \\
2 & \underline{1} & \cdots 1 \\
 & 0 &
\end{array}\ \uparrow$$

（3）

$$\begin{array}{r|l l}
2 & \underline{55} & \cdots 1 \\
2 & \underline{27} & \cdots 1 \\
2 & \underline{13} & \cdots 1 \\
2 & \underline{6} & \cdots 0 \\
2 & \underline{3} & \cdots 1 \\
2 & \underline{1} & \cdots 1 \\
 & 0 &
\end{array}\ \uparrow$$

即（1）$(23)_{10}=(10111)_2$，（2）$(74)_{10}=(1001010)_2$，（3）$(55)_{10}=(110111)_2$.

【例 3】 把下面不同进制的数化为十进制数.

（1）$(234)_5$；　　（2）$(127)_8$.

解：（1）$(234)_5=2\times5^2+3\times5^1+4$

$=50+15+4$

$=(69)_{10}$.

（2）$(127)_8=1\times8^2+2\times8^1+7$

$=64+16+7$

$=(87)_{10}$.

【例 4】 按要求完成下列各题.

（1）把$(358)_{10}$化为八进制数.

（2）把$(59)_{10}$化为六进制数.

解：如下.

（1）

$$\begin{array}{r|l l}
8 & 358 & \cdots 6 \\ \hline
8 & 44 & \cdots 4 \\ \hline
8 & 5 & \cdots 5 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

（2）

$$\begin{array}{r|l l}
6 & 59 & \cdots 5 \\ \hline
6 & 9 & \cdots 3 \\ \hline
6 & 1 & \cdots 1 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

（1）$(358)_{10}=(546)_8$　　（2）$(59)_{10}=(135)_6$

【例 5】 将八进制的 7630 化为二进制：

$(7630)_8=$ (　　　　　 $)_2$.（**视频**）

解：先将 7630 化成十进制，再由十进制化为二进制.

$(7630)_8=(7\times8^3+6\times8^2+3\times8+0)_{10}=(3992)_{10}$，

3992 化为二进制，执行除 2 取余依次倒写，结果为

$(3992)_{10}=(111110011000)_2$.

【例 6】 已知$(121)_4=(31)_k$，求 k.（**视频**）

分析：先将 4 进制的 121 和 k 进制的 31 都化为十进制，然后相等，即可求出 k.

解：$(121)_4=1\times4^2+2\times4+1=25$.　　$(31)_k=3\times k+1$

$3k+1=25$

解得 $k=8$.

难题精讲

一个 10 进制的三位数，把它分别化为 9 进制和 8 进制数后，就又得到了 2 个三位数. 老师发现这 3 个三位数的最高位数字恰好是 3,4,5，那这样的三位数一共有多少个？（**视频**）

解：我们设$(\overline{3ab})_{10}=(\overline{4cd})_9=(\overline{5ef})_8$；

我们知道$(\overline{4cd})_9$在$(400)_9$～$(488)_9$之间，化为 10 进制，也就是 324～404；

还知道$(\overline{5ef})_8$在$(500)_8$～$(577)_8$之间，化为 10 进制，也就是 320～383；

又知道$(\overline{3ab})_{10}$在$(300)_{10}$～$(399)_{10}$之间.

所以，这样的三位数应该在 324～383 之间，于是有 $383-324+1=60$（个）三位数满足条件.

同步练习

1．计算（1）$(10110)_2+(1010)_2$；（2）$(1101101)_2-(1011110)_2$；

（3）$(100110)_2\times(101)_2$；（4）$(1100011)_2\div(1001)_2$（视频）.

2．填空题.

（1）$(1110)_2=(\qquad)_{10}$；（2）$(100110)_2=(\qquad)_{10}$；

（3）$(92)_{10}=(\qquad)_2$；（4）$(147)_{10}=(\qquad)_2$.

3．把二进制数化为八进制数.

$(100111010101)_2=(\qquad)_8$.

4．比较下列各组数的大小.

（1）$(101101)_2$与$(46)_8$；（2）$(243)_6$与$(98)_{10}$；

（3）$(1726)_8$与$(3442)_5$；（4）$(2102)_3$与$(2102)_4$.

5．记号$(25)_k$表示 k 进制的数，如果$(52)_k$是$(25)_k$的两倍，那么，$(123)_k$在十进制中表示的数是多少？

6．请问自然数 $2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^5+2^4+2^3+2^2$ 能否被 18 整除.

7．一个自然数用三进制表示是三位数$\left(\overline{abc}\right)_3$，用四进制表示是三位数$\left(\overline{cba}\right)_4$，求这个自然数.

8．在几进制中有 $4\times13=100$？

9．请判断下列算式是几进制数的乘法.

$221\times322=132212$.

10．在 6 进制中有三位数$\overline{abc}$，化为 9 进制为$\overline{cba}$，求这个三位数在十进制中为多少。

同步练习参考答案

1．（1）
$$\begin{array}{r} 10110 \\ +\quad 1010 \\ \hline 100000 \end{array}$$

（2）
$$\begin{array}{r} 1101101 \\ -\quad 1011110 \\ \hline 1111 \end{array}$$

（3）
$$\begin{array}{r} 100110 \\ \times \qquad 101 \\ \hline 100110 \\ 100110 \\ \hline 10111110 \end{array}$$

（4）
$$\begin{array}{r} 1011 \\ 1001\overline{)1100011} \\ \underline{1001} \\ 1101 \\ \underline{1001} \\ 1001 \\ \underline{1001} \\ 0 \end{array}$$

2．（1）原式 $=1\times2^3+1\times2^2+1\times2=14$．

（2）原式 $=1\times2^5+1\times2^2+1\times2=38$．

（3）答案：$(1011100)_2$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 92 \quad \cdots 0 \\ \hline 2 & 46 \quad \cdots 0 \\ \hline 2 & 23 \quad \cdots 1 \\ \hline 2 & 11 \quad \cdots 1 \\ \hline 2 & 5 \quad \cdots 1 \\ \hline 2 & 2 \quad \cdots 0 \\ \hline 2 & 1 \quad \cdots 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

（4）答案：$(10010011)_2$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 147 \quad \cdots 1 \\ \hline 2 & 73 \quad \cdots 1 \\ \hline 2 & 36 \quad \cdots 0 \\ \hline 2 & 18 \quad \cdots 0 \\ \hline 2 & 9 \quad \cdots 1 \\ \hline 2 & 4 \quad \cdots 0 \\ \hline 2 & 2 \quad \cdots 0 \\ \hline 2 & 1 \quad \cdots 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

3．可以先把二进制数化为十进制数，再把此十进制数化为八进制数．同理可以把八进制数化为二进制数．

$$\begin{aligned}(100111010101)_2&=(1\times2^{11}+1\times2^8+1\times2^7+1\times2^6+1\times2^4+1\times2^2+1)_{10}\\&=(2517)_{10}=(4725)_8.\end{aligned}$$

4．答案：（1）$(101101)_2>(46)_8$．　　（2）$(243)_6>(98)_{10}$．

（3）$(1726)_8>(3442)_5$．（4）$(2102)_3<(2102)_4$．

5．因为$(52)_k=5k+2$，$(25)_k=2k+5$，所以，

$$5k+2=(2k+5)\times 2,\quad k=8.$$

因此，$(123)_k=(123)_8=1\times 8^2+2\times 8+3=83$．

$(123)_k$在十进制中表示的数是 83．

6．表面上本题与进制无关，可是如果将这个自然数算出来，再去用 18 除看能否除尽，那么计算量就比较大．考虑到这个自然数都是由 2 的幂组成的，所以用二进制数来解决会比较方便．

$$\begin{aligned}&2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^5+2^4+2^3+2^2\\&=1\times 2^{10}+1\times 2^9+1\times 2^8+1\times 2^7+0\times 2^6+1\times 2^5+1\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2+0\\&=(11110111100)_2.\end{aligned}$$

而$(18)_2=(10010)_2$.

计算$(11110111100)_2\div(10010)_2=(1101110)_2$．

说明自然数 $2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^5+2^4+2^3+2^2$ 能被 18 整除．

7．$\left(\overline{abc}\right)_3=a\times 3^2+b\times 3+c$，

$\left(\overline{cba}\right)_4=c\times 4^2+b\times 4+a$．

这两个数应该表示同一个数，因此得到 $a\times 3^2+b\times 3+c=c\times 4^2+b\times 4+a$ 即 $8a=b+15c$，

依题意 a,b,c 只能取 0,1,2 三个值，因为$\left(\overline{cba}\right)_4$为三位数，所以 $c\neq 0$，因此，$b+15c>15$，

所以在等式 $8a=b+15c$ 中，a 只能取 2，即 $a=2$．

这样有 $b+15c=8\times 2=16$．只有 $1+1\times 15=16$，所以，$b=c=1$．

因此这个自然数的三进制和四进制形式分别为$(221)_3$和$(112)_4$，而在十进制数中应为 $2\times 3^2+3+1=22$，

这个自然数为 22．

8．我们利用尾数分析来求解这个问题：

不管在几进制均有$(4)_{10}\times(3)_{10}=(12)_{10}$．但是，式中为 100，尾数为 0．

也就是说已经将 12 全部进到上一位．

所以说进位制 n 为 12 的约数，也就是 12,6,4,3,2．

但是出现了 4，所以不可能是 4,3,2 进制.

我们知道$(4)_{10}\times(13)_{10}=(52)_{10}$，因 $52<100$，也就是说不到 10 就已经进位，才能是 100，于是我们知道 $n<10$.

所以，n 只能是 6.

9．先从表面上可以断定该算式应是在四进制以上进制中进行的运算，因为出现的数字有 0,1,2,3.

其次，由首位数字的运算情况来看，3×2 必须进位，否则得不到六位数的乘积．这样可以判断算式只能是在四进制或五进制中进行的.

若是四进制，则有$(221)_4\times(322)_4=(203322)_4\neq(132212)_4$，因而不是四进制.

在五进制中，$(221)_5\times(322)_5=(132212)_5$ 成立.

算式 $221\times322=132212$ 只有在五进制中才能成立.

10．$(\overline{abc})_6=a\times6^2+b\times6+c=36a+6b+c$，

$(\overline{cba})_9=c\times92+b\times9+a=81c+9b+a$.

所以 $36a+6b+c=81c+9b+a$，于是 $35a=3b+80c$.

因为 $35a$ 是 5 的倍数，$80c$ 也是 5 的倍数．所以 $3b$ 也必须是 5 的倍数，又$(3,5)=1$.

所以，$b=0$ 或 5.

① 当 $b=0$，则 $35a=80c$，$7a=16c$；$(7,16)=1$，并且 $a,c\neq0$，所以 $a=16$，$c=7$.

但是在 6,9 进制，不可以有一个数字为 16.

② 当 $b=5$，则 $35a=3\times5+80c$，$7a=3+16c$，mod 7 后，$3+2c\equiv0$

所以 $c=2$ 或者 $2+7k$（k 为整数）．因为有 6 进制，所以不可能有 9 或者 9 以上的数，于是 $c=2$.

于是，$35a=15+80\times2$，$a=5$.

于是$(\overline{abc})_6=(552)_6=5\times6^2+5\times6+2=212$.

所以．这个三位数在十进制中为 212.

第 19 讲　行程问题（二）

知识要点

这一讲我们主要学习多人的相遇及追及问题，以及环形跑道上的行程问题．数量关系较多或较复杂时，可以设未知数 x 和列辅助方程来求解．

经典题再现

甲、乙、丙 3 人赛跑，甲每分钟跑 120 米，乙每分钟跑 100 米，丙每分钟跑 70 米，如果 3 人同时同向，从同地出发，沿周长是 300 米的圆形跑道奔跑，经过多少分钟之后 3 人又可相聚？（**视频**）

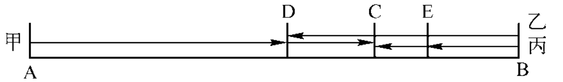
解：甲第一次追上丙需要 $300\div(120-70)=6$（分钟），那么在 $6,12,18,24,30,36$ 分钟…这些时间甲都可以追上丙；

甲第一次追上乙需要 $300\div(120-100)=15$（分钟），那么在 $15,30,45$ 分钟…这些时间甲都可以追上乙，所以在第 30 分时甲同时把乙和丙都追上了．

典型例题

【例 1】 甲、乙、丙 3 人行路，甲每分钟走 60 米，乙每分钟走 50 米，丙每分钟走 40 米．甲从 A 地、乙和丙从 B 地同时出发相向而行，甲和乙相遇后，过了 15 分钟后又和丙相遇．求 A、B 两地的距离．（**视频**）

解：如下图所示．



当甲、乙两人在 D 地相遇时，丙在 E 地．即走 D 至 E 这段距离甲、丙两人共用 15 分钟．

甲和丙 15 分钟内走的路程，也是乙比丙多走的路程．

$(60+40)\times15=1500$（米）.

乙和丙的速度差为 $50-40=10$（米/分钟）.

甲和乙的相遇时间为 $1500\div10=150$（分钟）.

A、B 两地的距离为$(50+60)\times150=16500$（米）$=16.5$（千米）.

答：A、B 两地的距离是 16.5 千米.

【例 2】 某小学组织学生去春游，步行速度为 1 米/秒．队尾的李老师以 2.5 米/秒的速度赶到排头，然后立即返回队尾共用 10 分钟．求队伍的长度.（**视频**）

解：设去时用时为 x，则返回时用时为 $10\times60-x$.

去时是追及，追及距离是队伍长，追及距离$=(2.5-1)\times x$;

返回时是相遇，李老师与队尾同学合走队伍长，队伍长$=(2.5+1)\times(600-x)$,

队伍长度是不变的，所以，可列出关于 x 的方程

$(2.5-1)\times x=(2.5+1)\times(600-x)$.

解得　$x=420$（秒）.

则队伍长为$(2.5-1)\times x=1.5\times420=630$（米）.

答：队伍长度为 630 米.

【例 3】 小明在 360 米长的环形跑道上跑了一圈，已知他前一半时间每秒跑 5 米，后一半时间每秒跑 4 米，问他后一半路程用了多长时间？（**视频**）

解：设一半时间是 t.

$5t+4t=360$,

解得 $t=40$（秒），

即一半时间为 40 秒．由于前 40 秒速度快，所以跑的距离超过了 180 米，

$5\times40=200$（米）.

所以，后一半距离，即后 180 米有 $200-180=20$（米）是用 5 米/秒的速度跑的.

$20\div5=4$（秒）.

后一半距离共用时间为 $40+4=44$（秒）.

答：小明后一半路程用了 44 秒.

【例 4】 A、B 两地之间是山路，相距 60 千米，其中一部分是上坡路，其余是下坡路．某人骑电动车从 A 地到 B 地，再沿原路返回，去时用了 4.5 小时，返回时用了 3.5 小时．已知下坡路每小时行 20 千米，那么上坡路每小时

行多少千米？（**视频**）

解：去时上坡时间＋去时下坡时间＝4.5 小时；

回时上坡时间＋回时下坡时间＝3.5 小时.

两式相加得：来回上坡时间＋来回下坡时间＝8 小时.

由于下坡速度是 20 千米/小时，来回下坡路程是 $AC+BC=60$（千米），所以，来回下坡时间是 $60\div20=3$（小时）.

来回上坡时间为 $8-3=5$（小时）.

来回上坡路程也是 $AC+BC=60$（千米），所以，上坡速度是 $60\div5=12$（千米/小时）.

答：上坡路的速度是 12 千米/小时.

【例 5】 龟、兔举行 2000 米竞走，龟每分钟走 25 米，兔每分钟走 320 米．兔自以为比龟快，就在途中睡了一觉，结果龟倒比兔提前 1.25 分钟到达终点，求兔在途中睡了多少分钟？（**视频**）

解：兔睡觉的时间＝龟行走的时间＋1.25 分钟－兔行走的时间，

所以，$2000\div25+1.25-2000\div320$

$=80+1.25-6.25$

$=75$（分钟）.

答：兔在途中睡了 75 分钟.

【例 6】 铁路旁的一条与铁路平行的小路上，有一行人与骑车人同时向南行进，行人速度为 3.6 千米/小时，骑车人速度为 10.8 千米/小时，这时有一列火车从他们背后开过来，火车经过行人用 22 秒，经过骑车人用 26 秒，问这列火车的车身总长是多少？（**视频**）

分析：本题属于追及问题，行人的速度为 3.6 千米/小时＝1 米/秒，骑车人的速度为 10.8 千米/小时＝3 米/秒．火车的车身长度既等于火车车尾与行人的路程差，也等于火车车尾与骑车人的路程差.

解：设这列火车的速度是 x 米/秒，依题意列方程

$(x-1)\times22=(x-3)\times26$，

解得 $x=14$.

所以火车的车身长为 $(14-1)\times22=286$（米）.

答：这列火车的车身总长为 286 米.

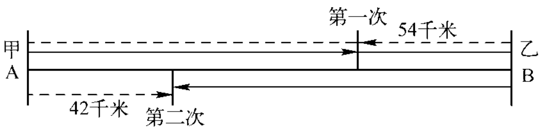
难题精讲

甲、乙两车同时从 A、B 两地出发相向而行，在距 B 地 54 千米的地方第一次相遇．然后继续前进，它们各自到达对方车的出发地后立即顺原路原速返回，途中又在距 A 地 42 千米的地方第二次相遇．求 A、B 两地的距离．（**视频**）

分析:

如果把 A、B 之间的距离叫做一个单程，那么甲、乙两车共行驶了 3 个单程，由于两车同时出发且速度始终不变，因而，先计算乙行驶的总路程，再求 A、B 两地的距离．

解：如下图所示：乙一共行驶了 $54\times3=162$（千米）．从而 A、B 两地的距离就是 $162-42=120$（千米）．



答：A、B 两地相距 120 千米．

同步练习

1．小明以 3 米/秒的速度在沿着铁路旁的公路上散步，迎面开来一列火车，从车头到车尾经过他身旁共用了 20 秒．已知火车全长 420 米．求火车车速．（**视频**）

2．甲、乙两辆汽车分别从 A、B 两地相对开出．甲每小时行 40 千米，乙每小时行 45 千米，甲、乙两车第一次相遇后继续前进，甲、乙两车各自到 B、A 两地后，立即按原路原速返回，两车从开始到第二次相遇共用 6 小时，那么 A、B 两地相距多少千米？

3．甲、乙两人骑自行车从环形路上同一地点同时出发，背向而行．现在已知甲走一圈的时间是 70 分钟．如果在出发后第 45 分钟，甲、乙两人相遇，那么乙走一圈的时间是多少分钟？（**视频**）

4．A、B 两城相距 420 千米，一辆轿车和一辆货车分别从两城相向而行．货车上午 8 点出发，轿车上午 9 点出发，轿车速度是货车速度的 2 倍．两车在 11 点时相遇．求两车的速度．（**视频**）

5．甲、乙两人在两地间同时相向而行，8 小时相遇．如果两人每小时的速度都减少 3 千米，则 10 小时相遇，求两地间的距离．（**视频**）

6．星期天，妈妈与女儿小红在公园划船，她们沿河向上游划去，小红一不小心，戴的太阳帽被风刮走了，当她们发现并掉过船头时，帽子与船已经相距 3 千米．假定小船的速度是每小时 6 千米，水流速度是每小时 2 千米，那么，母女俩追回太阳帽要多长时间？

7．一列火车通过 250 米长的隧道用 25 秒，通过 210 米长的隧道用 23 秒，该列车与另一列长为 320 米、速度为 18 米/秒的列车错车需多少秒？

8．体育场的环形跑道长 400 米，小刚和小华在跑道的同一起跑线上，同时向相反方向起跑，小刚每分钟跑 152 米，小华每分钟跑 148 米．多少分钟后他们第三次相遇？

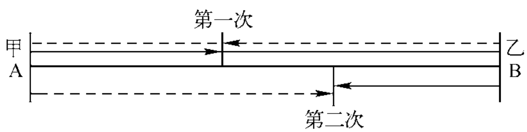
9．小明和小强从 400 米环形跑道的同一起点出发，背向而行．当他们第一次相遇时，小明转身往回跑；再次相遇时，小强转身往回跑；以后的每次相遇分别是小明和小强两人交替调转方向．两人的速度在运动过程中始终保持不变，小明每秒跑 3 米，小强每秒跑 5 米．那么当他们第 30 次相遇时，小明一共跑了多少米？

10．快、中、慢速 3 车同时从 A 地出发，追赶一辆行驶的自行车，3 车的速度分别是每小时 24 千米、20 千米、19 千米．快车追上自行车用了 6 小时，中速车追上自行车用了 10 小时，慢车追上自行车用了多少小时？

同步练习参考答案

1．由题意知 20 秒小明与火车恰好行了 420 米，则火车的速度为 $420\div20-3=18$ 米/秒．

2．如下图所示．



从图中我们可以看出，甲、乙两车在 6 小时内共行驶了 3 个 A 到 B．即两车行驶一个 A 到 B 需 $6\div3=2$（小时）．

所以，A、B 两地的距离为$(40+45)\times(6\div3)=170$（千米）．

3．由已知得甲 $70-45=25$（分钟）走的路乙需走 45 分钟，即甲 5 分钟走的路乙需走 9 分钟．甲走一圈需 $70\div5=14$（个）5 分钟，那么乙走一圈需 $9\times14=126$（分钟）．

4．设货车的速度为 x 千米/小时，则轿车的速度为 $2x$ 千米/小时．

$(11-8)x+(11-9)\times2x=420$，

解得 $x=60$，$2x=120$．

所以，货车速度为 60 千米/小时，轿车速度为 120 千米/小时．

5．当两人的速度都减少 3 千米时，那么，8 小时比原来少走了 $8\times(3+3)=48$（千米），

减速后两个人的速度和为 $48\div(10-8)=24$（千米/小时），

两地间的距离为 $24\times10=240$（千米）．

6．追及时间＝追及距离÷速度差．

所以，追及时间为 $3\div(6+2-2)=0.5$（小时）．

7．设该列车车长为 x，车速为 v．

$250+x=25v$．

$210+x=23v$，

$v=(250-210)\div2=20$（米/秒），

$x=25\times20-250=250$（米）．

即第一列车长 250 米，速度为 20 米/秒．第二列车长 320 米，速度为 18 米/秒．

错车时行驶 $250+320=570$（米），错车速度为 $20+18=38$（米/秒）．

错车时间为 $570\div38=15$（秒）．

8．两人在环形道上跑步，开始“反向”，后来会转化成“相向”，所以实际上就是相向相遇问题．相遇时两人正好走完一圈．全长 400 米，所以第 3 次相遇时两人共跑了（400×3）米．

相遇时间为 $400\times3\div(152+148)=4$（分钟）．

9．此题关键是要分析清楚：两人每次运动的过程是追及还是相遇；每一个过程所用的时间是多少．从中找出规律，进而求出相遇 30 次所用的总时

间，那么小明的总路程就很简单了.

第一次相遇，背向而行，用时 $400\div(3+5)=50$（秒），

第二次相遇，同向而行，实际上是小强把小明落下了一圈，

用时 $400\div(5-3)=200$（秒）.

以后是背向、同向交替，共有 15 个回合.

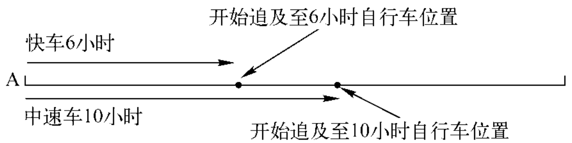
$(200+50)\times15=3750$（秒），

小明一共跑了 $3\times3750=11250$（米）.

10．快车 6 小时行驶 $24\times6=144$（千米），

中速车 10 小时行驶 $20\times10=200$（千米），

$200-144=56$（千米）是自行车行 $10-6=4$（小时）的距离. 如下图所示.



自行车的速度为 $56\div4=14$（千米/小时）.

开始追及时自行车距 A 地的距离为 $144-14\times6=60$（千米）.

慢车追及自行车的时间为 $60\div(19-14)=12$（小时）.

第 20 讲 数的整除

知识要点

整除的意义：

对于整数 a 和不为零的整数 b，如果 a 除以 b 的商是整数且没有余数（余数为 0），我们就说 a 能被 b 整除，或 b 能整除 a．a 叫 b 的倍数，b 叫 a 的约数．显然，零是任何自然数的倍数，1 是任何整数的约数．

我们已经学过能被 2,3,5 整除的数的特征：个位上是偶数（0,2,4,6,8）的数，都能被 2 整除．个位上是 0 或者 5 的数，都能被 5 整除．一个数的各个数位上数字的和能被 3 整除，那么这个数就能被 3 整除．

（1）能被 4 或 25 整除的数的特征：一个数的末两位能被 4 或 25 整除，那么这个数就能被 4 或 25 整除．

例如：7856 的末两位数 56 能被 4 整除，那么 7856 能被 4 整除．

因为 $7856=78\times100+56$，

100 能被 4 整除，56 能被 4 整除，所以，7856 能被 4 整除．

（2）能被 8 或 125 整除的数的特征：一个数的末三位能被 8 或 125 整除，那么这个数就能被 8 或 125 整除．

例如：7176 的末三位数 176 能被 8 整除，那么 7176 能被 8 整除．

因为 $7176=7\times1000+176$，

1000 能被 8 整除，176 能被 8 整除，所以 7176 能被 8 整除．

（3）能被 9 整除的数的特征：一个数的各个数位上数字的和能被 9 整除，那么这个数就能被 9 整除．

例如：$3276=3\times1000+2\times100+7\times10+6$

$$=3\times(999+1)+2\times(99+1)+7\times(9+1)+6$$

$=(3\times999+2\times99+7\times9)+(3+2+7+6)$.

因为前一括号里的数肯定能被 9 整除，所以只要看后一个括号里的结果能否被 9 整除．由于 $3+2+7+6=18$ 能被 9 整除，所以原数能被 9 整除．

（4）能被 7，11，13 整除的数的特征：如果一个自然数的末三位数字所组成的数与末三位以前的数字所组成的数的差（大数减小数）能被 7（或 11，或 13）整除，那么这个自然数就能被 7（或 11，或 13）整除．如果这个差还比较大，不易试除的话．我们可以连续进行这个过程．

例如：
$$\begin{aligned}890799&=890\times1000+799\\&=890\times1001-890+799\\&=890\times1001-(890-799).\end{aligned}$$

这里，我们将 1000 写成 $1001-1$．这是因为 $1001=7\times11\times13$．这样，890×1001 一定能被 7,11,13 整除．那么 890799 能否被 7,11,13 整除，关键就是判断：$890-799=91$ 能否被 7,11,13 整除，显然 91 只能被 7,13 整除，但不能被 11 整除．因此 890799 能被 7,13 整除，但不能被 11 整除．

另外：**判断一个自然数能否被 11 整除，还有下面的方法：如果一个自然数的奇数位上的数字和与偶数位上的数字和的差（大数减小数）能被 11 整除．这个数就能被 11 整除．**

例如：

$$\begin{aligned}89716&=8\times10000+9\times1000+7\times100+1\times10+6\\&=8\times(909\times11+1)+9\times(91\times11-1)+7\times(9\times11+1)+1\times(11-1)+6\\&=(8\times909\times11+9\times91\times11+7\times9\times11+1\times11)+(8-9+7-1+6)\end{aligned}$$

因为前一个括号里的结果能被 11 整除，后一个括号内恰是奇数位上数字之和与偶数位上数字之和的差．$8-9+7-1+6=11$，它是 11 的倍数，所以原数 89716 能被 11 整除．

（5）如果一个数能同时被两个互质的数整除，那么这个数就能被这两个互质数的积整除．

例如：2 能整除 3276，9 能整除 3276，2 和 9 互质，所以 18 能整除 3276．

又如，2 能整除 12，4 能整除 12，但 2 和 4 不互质，所以 12 不能被

$2\times4=8$ 整除.

经典题再现

四位数 $\overline{3AA1}$ 能被 9 整除，求 A.（视频）

分析：能被 9 整除的数的特征是：各个数位上的数字和能被 9 整除. 我们把给出的四位数的数字和加起来，即 $4+2A=9$ 的倍数，再用试验的办法解出 A，注意 A 必须是 0 到 9 之间的整数.

解：因为 9 的整除特征是各个数位上的数字之和是 9 的倍数，如果 $3+A+A+1=9$，则 $A=2.5$ 不是整数，如果 $3+A+A+1=18$，则 $A=7$，如果 $3+A+A+1=27$，则 $A=11.5$. 所以 $A=7$ 满足要求.

典型例题

【例 1】 已知整数 $\overline{5a6a7a8a9a}$ 能被 11 整除，则满足这个条件的整数为多少？（视频）

分析：能被 11 整除的数的特征有两种：（1）末三位数字所表示的数与末三位以前的数所组成的数的差能被 11 整除；（2）奇数位上的数字和与偶数位上的数字和的差能被 11 整除. 根据题中给出的整数的特征（奇数位上都是 a），采取第二种判断方法比较容易.

解：根据能被 11 整除的特征可知，11 能整除 $(5+6+7+8+9)-5a$，即 11 整除 $(35-5a)$ 或 11 整除 $(5a-35)$. 又因为 $35-5\mathrm{a}=5(7-a)$，$5a-35=5(a-7)$，可知，11 整除 $(7-a)$ 或 11 整除 $(a-7)$，因为 a 只能取 0 至 9 的数，所以 a 只能等于 7 时才能满足条件.

答：满足这个条件的整数为 5767778797.

【例 2】 将 1,2,3,4,⋯,30 这 30 个自然数依次写下来，得一多位数 1234567⋯2930，试求这个多位数除以 9 的余数.（视频）

解：一个自然数被 9 除的余数与它的各个数位数字和被 9 除的余数相等.

例如：
$$\begin{aligned}1986&=1\times1000+9\times100+8\times10+6\\&=1\times(999+1)+9\times(99+1)+8\times(9+1)+6\\&=(1\times999+9\times99+8\times9)+(1+9+8+6).\end{aligned}$$

前面一个括号是 9 的倍数，后面一个括号是各个数位数字和. 所以这个

数被 9 除的余数就是 $1+9+8+6$ 被 9 除的余数.

任何一个自然数都可以写成这种结构，所以，这是一个具有普遍性的规律.

1 到 30 这 30 个自然数的所有数字之和为 168，而 $168\div 9$ 余 6．所以余数是 6.

【例 3】 在自然数列中由 1 开始往后数第 100 个不被 7 整除的数是多少？**（视频）**

前 100 个自然数中，有 14 个 7 的倍数，100 是第 86 个不被 7 整除的数，往后数 105,112 是 7 的倍数，因此，第 100 个不被 7 整除的数是 116.

【例 4】 一个四位数 $\overline{ab12}$ 加上 9 后能被 9 整除，减去 8 后能被 8 整除，求满足条件的最大数？**（视频）**

解：因为 $\overline{ab12}$ 加上 9 后能被 9 整除，而 9 又能被 9 整除．可知，$\overline{ab12}$ 是 9 的倍数；同理 $\overline{ab12}$ 是 8 的倍数.

根据能被 8 整除的数的特征可知：$\overline{b12}$ 能被 8 整除，那么 b 可能是 1,3,5,7,9.

根据能被 9 整除的数的特征可知：$a+b+1+2=a+b+3$ 应是 9 的倍数．当 $b=1,3,5,7,9$ 时，则 $a=5,3,1,8,6$．由于题目求满足条件的最大数，因此 a 应尽可能地大，$a=8$，则 $b=7$．所以满足条件的最大数是 8712.

【例 5】 一个各位数字均不为零的三位数能被 8 整除，将其百位数字、十位数字和个位数字分别画去后可以得到 3 个两位数．已知这些两位数中一个是 5 的倍数，另一个是 6 的倍数，还有一个是 7 的倍数，那么原来的三位数是多少.**（视频）**

解：$7\times 2=14$，$7\times 3=21$，$7\times 4=28$，$7\times 5=35$，$7\times 6=42$，$7\times 7=49$，$7\times 8=56$，$7\times 9=63$，$7\times 10=70$，$7\times 11=77$，$7\times 12=84$，$7\times 13=91$，$7\times 14=98$.

因为没有 0，所以，5 的倍数必是 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95.

所以，这个数的十位或个位必然有 5.

由于 8 的任何倍的个位都不是 5，所以，这个数的十位必有 5，而且画掉个位得 5 的倍数，

画掉百位得 7 的倍数，所以，这个数的十位和个位是 56.

所以，原来的三位数是 656.

【例 6】 已知一个五位数$\overline{\square 691\square}$能被 55 整除，请求出所有符合题意的五位数.（**视频**）

解：五位数$\overline{A691B}$能被 55 整除，即此五位数既能被 5 整除，又能被 11 整除．所以 $B=0$ 或 5．当 $B=0$ 时，$\overline{A6910}$ 能被 11 整除，所以 $(A+9+0)-(6+1)=A+2$ 能被 11 整除，因此 $A=9$；当 $B=5$ 时，同样可求出 $A=4$．所以，所求的五位数是 96910 或 46915.

难题精讲

下面一个 1983 位数 $\underbrace{33\cdots3}_{991个3}\square\underbrace{44\cdots4}_{991个4}$ 中间漏写了一个数字（方框），已知这个多位数被 7 整除，那么中间方框内的数字是多少？（**视频**）

解：$\underbrace{33\cdots3}_{991个3}\square\underbrace{44\cdots4}_{991个4}=\underbrace{33\cdots3}_{990个3}\times10^{993}+3\square4\times10^{990}+\underbrace{44\cdots4}_{990个4}$，

因为 111111 能被 7 整除，所以 $\underbrace{33\cdots3}_{990个3}$ 和 $\underbrace{44\cdots4}_{990个4}$ 都能被 7 整除，所以只要 3□4 能被 7 整除，原数即可被 7 整除．故得中间方框内的数字是 6.

同步练习

1．在下列数中能被 3,4,6 整除的分别有哪些？

315　　286　　741　　129　　344　　680　　726　　996

2．一些三位数能同时被 2,5,7 整除，这样的三位数按从小到大的顺序排成一列，中间的一个是多少？

3．有一个五位数 $\overline{15\square\square6}$ 是 99 的倍数，且其百位数上和十位数上的数字都小于 7，则这个五位数是多少？

4．有一类数，每一个数都能被 11 整除，并且各位数字之和是 20，这类数中，最小的数是多少？

5．六位数 $\overline{6x6x6x}$ 能被 11 整除，x 是 0 到 9 中的数，这样的六位数是多少？

6．设三位数$\overline{2A5}$和$\overline{13B}$之积能被 36 整除，那么，所有可能的 $A+B$ 之值的和是多少？

7．任取一个四位数乘 3456，用 A 表示其积的各位数字之和，用 B 表示 A 的各位数字之和，C 表示 B 的各位数字之和，求 C 是多少？

8．从 0,1,2,4,5,7 中，选出 4 个数，排列成能被 2,3,5 整除的四位数，其中最大的是多少？

9．$\overline{42\square 28\square}$是 99 的倍数，这个数除以 99 所得的商是多少？

10．在 1992 后面补上 3 个数字，组成一个七位数，使它们分别能被 2,3,5,11 整除，这个七位数的最小值是多少？

同步练习参考答案

1．能被 3 整除的数有 315, 741, 129, 996, 726．

能被 4 整除的数有 344, 996, 680．

能被 6 整除的数有 726, 996．

2．能同时被 2,5,7 整除的数，应被 70 整除，这样的三位数是 70×2，70×3，…，70×14．即中间的一个数是 $70\times 8=560$．

3．这个五位数要是 99 的倍数，就必须既能被 9 整除，又同时能被 11 整除．根据题意，百位和十位上的数字只能填 0,1,2,3,4,5,6 中的两个数字．

能被 9 整除，各个数位数字和是 9 的倍数：$1+5+\square+\square+6=12+\square+\square$ 是 9 的倍数．

十位和百位之和$\square+\square=6$．

$0+6=1+5=2+4=3+3=6$．

再由能被 11 整除的条件，$(1+\square+6)$与$(5+\square)$之差是 11 的倍数，所以，十位与百位差是 2．

只有 2,4 才满足条件，所以这个五位数是 15246．

4．最小数是 1199．因为百位与个位数字之和必须与千位和十位数字之和相等，都是 10，要求最小的数，千位、百位只能都是 1．

5．因 $6+6+6=18$ 与 $3x$ 的差是 11 的倍数．x 又是一位数，只能取 6．故原六位数是 666666．

6．$36=2^2\times 3^2$，两数之积能被 36 整除，其积的因数必含 $2^2\times 3^2$，这两个

数中必含因数 2 个 2 和 2 个 3.

如果其中一个数含有因数两个 2 和两个 3，则它与另外任何一个数的积都能被 36 整除. 但不管 A、B 为何值，$\overline{2A5}$ 和 $\overline{13B}$ 中没有一个数含有因数两个 2 和两个 3 的. 我们令 A、B 均依次取 0～9，列出其中含有因数 2 和 3 的所有情况：$225=3^2\times25$，$255=3\times85$，$285=3\times95$；$130=2\times65$，$132=2^2\times3\times11$，$134=2\times67$，$135=3^3\times15$，$136=2^2\times3434$，$138=2\times3\times23$，因为 $2A5$ 不含有 2 的因数，所以 13B 必须含有两个 2 的因数方可，这样可以确定，只有 132×225、132×255、132×285 和 136×225 满足要求.

所以所求的和为 $2+2+2+5+2+8+6+2=29$.

7. 根据题意，两个四位数相乘其积的位数是七位数或八位数两种可能.

因为 $3456=384\times9$，所以任何一个四位数乘 3456，其积一定能被 9 整除，根据能被 9 整除的数的特征，可知其积的各位数字之和 A 也能被 9 整除，所以 A 有以下八种可能取值，即 9,18,27,36,45,54,63,72. 从而 A 的各位数字之和 B 总是 9，B 的各位数字之和 C 也总是 9.

8. 根据能被 2,3,5 整除的数的特征，这个四位数的个位必须是 0，而十位、百位、千位上数字的和是 3 的倍数.

为了使这个四位数尽可能最大，千位上的数字应从所给的 6 个数字中挑选最大的一个. 从 7 开始试验，$7+4+1=12$，其和是 3 的倍数，因此其中最大的数是 7410.

9. 因为 $99=9\times11$，所以 $\overline{42\square28\square}$ 既是 9 的倍数，又是 11 的倍数. 根据是 9 的倍数的特点，这个数各位上数字的和是 9 的倍数. $\overline{42\square28\square}$ 这个六位数中已知的四个数的和是 $4+2+2+8=16$，因此空格中两个数字的和是 2 或 11. 我们把右起第一、三、五位看做奇位，那么奇位上已知两个数字的和是 $2+2=4$，而偶位上已知两个数字的和是 $4+8=12$，再根据 11 的倍数的特点，奇位上数字的和与偶位上数字的和之差是 11 的倍数，所以填入空格的两个数应该相差 3 或相差 8. 从以上分析可知填入的两个数字的和不可能是 2，应该是 11. 显然它们的差不可能是 8，应该是 3，符合这两个条件的数字只有 7 和 4. 填入空格时要注意 7 填在偶位上，4 填在奇位上，即原六位数是 427284，又 $427284\div99=4316$，所以所得的商是 4316.

10．根据这个七位数分别能被 2,3,5,11 整除的条件，这个七位数必定是 2,3,5,11 的公倍数，而 2,3,5,11 的最小公倍数是 $2\times3\times5\times11=330$.

这样，$1992000\div330=6036\cdots\cdots120$，因此符合题意的七位数应是$(6036+1)$倍的数，即

$1992000+(330-120)=1992210$.

第 21 讲　牛吃草问题

知识要点

有一堆割下的青草，可供 25 头牛吃 36 天，那么可供 45 头牛吃多少天？（视频）

如果把割下的草改为草地上的草，那么牛一边吃，草一边长，问题的难度就增加了.

这一讲，我们主要解决这种类型的牛吃草问题，一般也称为牛顿问题.

牛吃的草分两部分：原有的草和新长出的草．这里关键要解决的有以下两个问题：①草的生长速度，即单位时间长出多少新草．②原有草量是多少．这两个问题解决了，所要求的量也就随之解决.

与牛吃草属于同一种类型的问题还有：排队问题，例如火车站进站口，一边进人，一边又有新人来；排水问题，例如一只船漏水，一边向外掏水，一边又有新水灌进来；等等.

经典题再现

牧场上有一片青草，可供 25 头牛吃 6 周，或者供 20 头牛吃 9 周．如果每头牛每天吃草量相同，草每周的生长速度也相同，那么这片青草可供 16 头牛吃几周？（视频）

分析：要想求 16 头牛吃几周，需要求出牧场原有的草量和每周新长的草量．由于是同一片草地，那么不管是 25 头牛吃，还是 20 头牛吃，原来的草量都是相同的．但是，由于吃的时间不同，吃的时间长，新长出的草量也就多．因此，在两种条件下牛吃的总草量不同．它们分别是 $25\times6=150$（份）；$20\times9=180$（份）.

两者相差的量是 $180-150=30$（份）.

这正是 $9-6=3$（周）新长的草量，这样每周长的草量就是 $30\div3=10$（份）.

有了每周新长的草量，就可以从牛吃的总草量中减去新长的总草量，得到牧场原有的青草量.

16 头牛每周吃草量是 16 份，去掉每周新长的草量，就是每周要吃掉原有的草量. 牧场原有的草量除以每周要吃掉的原有的草量，就可以求出可供 16 头牛吃几周了.

解：设每头牛每周吃草 1 份.

求每周新长草量（即草的生长速度）.

每周新长草 $=(20\times9-25\times6)\div(9-6)=10$（份）.

原有草量 $=25\times6-6\times10=90$（份）.

设 16 头牛吃 x 周，共吃 $16x$ 份草，其中原草 90 份，新草 $10x$ 份，列方程 $16x=90+10x$，解得 $x=15$（周）.

答：这片青草可供 16 头牛吃 15 周.

典型例题

【例 1】 一片牧草，可供 16 头牛吃 20 天，也可供 80 只羊吃 12 天，如果每天一头牛吃的草量等于 4 只羊吃的草量，那么 10 头牛与 60 只羊一起吃这一片牧草，多少天可吃完这片牧草（假设牧草每天生长速度相同，羊、牛每天吃草量不变）？（**视频**）

分析：这道题目中吃草的既有牛，又有羊，并且牛和羊每天吃的草量不同，所以我们就要想办法把条件统一. 因为每天一头牛吃的草量相当于 4 只羊吃的草量，那么 80 只羊吃 12 天就相当于 20（$80\div4$）头牛吃 12 天. 或者可以把牛吃的草量化成羊吃的草量来算.

都按牛吃草计算. 把条件“80 只羊吃 12 天”换成 $(80\div4)=20$（头）牛吃 12 天，80 只羊换成 $(80\div4)=20$（头）牛.

解：假设每头牛每天吃草 1 份.

草的生长速度为 $(16\times20-20\times12)\div(20-12)=10$（份/天）.

原有草量为

$16 \times 20 - 20 \times 10 = 120$（份）或

$20 \times 12 - 12 \times 10 = 120$（份）.

设这片牧草可供$(10 + 15) = 25$（头）牛吃 x 天，

列方程 $120 + 10x = 25x$，

解得 $x = 8$.

答：10 头牛与 60 只羊一起吃 8 天可吃完这片牧草.

【例 2】 有一牧场，17 头牛 30 天可将草吃完，19 头牛则 24 天可将草吃完，原有牛若干头，吃 6 天后卖了 4 头，余下的牛再吃 2 天便可将草吃完，问原有牛多少头？（草每天匀速生长）（**视频**）

分析：这道题与前面不同的是，中途卖掉了 4 头牛，可以先按照没有卖掉牛时来算．假设没有卖掉那 4 头牛，原有的草量就不够吃，那么若干头牛 8 天（先吃 6 天，后吃 2 天）吃的总草量为：原有草量 + 8 天新长的草量 + 卖掉的 4 头牛 2 天应该吃的草量．知道了若干头牛 8 天吃的总草量，就可以解决问题了.

解：假设 1 头牛每天吃草 1 份.

草的生长速度为$(17 \times 30 - 19 \times 24) \div (30 - 24) = 9$（份/天）.

原有草量为 $17 \times 30 - 9 \times 30 = 240$（份）.

若干头牛 8 天共吃草 $240 + 9 \times 8 + 2 \times 4 = 320$（份）.

一共有牛 $320 \div 8 = 40$（头）.

答：一共有 40 头牛.

【例 3】 有一水井，陆续不断地涌出泉水，每分钟涌出的水量相同，如果使用 3 台抽水机来抽水，36 分钟可以抽完井水；如果使用 5 台抽水机来抽水，20 分钟可以抽完井水．现在根据建筑工地需要，必须在 12 分钟内将井水抽完，问需要抽水机多少台？

分析：本题初看与“牛吃草问题”不相干，但仔细对比它也属于“牛吃草问题”．对比：水井中每分钟涌进的水量相当于草的生长速度，在抽水机抽水前井中必有一些水这相当于老草．因此，此类题的解法和“牛吃草问题”的解法是完全一样的．掌握了这种解法，以后我们见到这种类型的题便可迎刃而解了.

解：假设一架抽水机每分钟抽水 1 份.

每分钟新涌进的水量为$(3\times36-5\times20)\div(36-20)=0.5$（份），

未抽水时原有水量为 $3\times36-0.5\times36=90$（份），

12 分钟内将井水抽完，需要抽水机$(90+0.5\times12)\div12=8$（台）.

答：需要 8 台抽水机.

【例 4】 画展 9 点开门，但很早就有人来排队等候入场．从第一批观众到来时起，每分钟来的观众人数一样多．如果开 3 个入场口，9 点过 9 分就不再有人排队．如果开 5 个入场口，9 点过 5 分就没有人排队．问第一批观众到达的时间是几点几分？（**视频**）

分析：题目中“每分钟来的观众”可看做牧场上每天长出的草，“入场口”可看做牛．这样这道题可用“牛吃草问题”来解决.

解：设每分钟从每个入场口进来的观众人数为 1 份.

每分钟新来的观众为$(3\times9-5\times5)\div(9-5)=0.5$（份）.

9 点前等在门口的老观众为 $3\times9-0.5\times9=22.5$（份），

每分钟来人 0.5 份，22.5 份需要 $22.5\div0.5=45$（分钟）.

所以，第一批到达的观众是 8 点 15 分.

【例 5】 由于天气渐冷，牧场上的草每天以均匀的速度减少．经计算，牧场上的草可供 20 头牛吃 5 天，可供 16 头牛吃 6 天．那么可供 11 头牛吃几天？（**视频**）

分析：与一般的牛吃草问题不同，本题的草不但没有新长出来，而且还在不断减少．但是草的量是均匀地减少，所以我们同样可以用类似的方法来求解，不过要略有不同.

解：假设每头牛每天吃草 1 份.

草的减少速度为$(20\times5-16\times6)\div(6-5)=4$（份/天）

原有草量为 $20\times5+4\times5=120$（份）.

设这片牧草可供 11 头牛吃 x 天.

$120-4x=11x$

$x=8$（天）.

答：这片牧草可供 11 头牛吃 8 天.

【例 6】 早晨 6 点，某火车站进站处已有一些旅客等候检票进站，此时，每分钟还有若干人前来进站处准备进站．这样，如果设立 4 个检票口，15 分

钟可以完成检票，如果设立 8 个检票口，7 分钟可以完成检票．现要求 5 分钟完成检票，需设立几个检票口？（**视频**）

分析：已有的等候检票的旅客，相当于“原有的草量”，每分钟新来的旅客，想当于“新长的草”，按照牛吃草问题的解法来做．

解：设 1 个检票口 1 分钟进 1 份旅客．

每分钟新来旅客为$(4\times15-8\times7)\div(15-7)=0.5$（份），

检票口开放时已有旅客为 $4\times15-0.5\times15=52.5$（份），

设 5 分钟完成检票，需设立 x 个检票口，

列方程 $5x=52.5+0.5\times5$，

解得 $x=11$（个）．

答：需设立 11 个检票口．

难题精讲

有 3 块草地，面积分别为 4 亩、8 亩、10 亩．草地上的草一样厚，而且长得一样快．第一块草地可供 24 头牛吃 6 周，第二块草地可供 36 头牛吃 12 周，第三块草地可供 50 头牛吃几周？（**视频**）

分析：此题已知的不是同一块草地，而是面积不同的 3 块草地，第二块草地的面积是第一块草地面积的 2 倍，因为每块草地上草的生长速度相同，我们可以把第一块草地的面积乘以 2，那么第一块草地就可供 $24\times2=48$（头）牛吃 6 周，这样就可以求出第二块草地上草的生长速度和原有草量．然后再根据倍数关系求出第三块草地上草的生长速度和原有草量．

解：设每头牛每周吃草 1 份．

第一块草地 8 亩可供 48 头牛吃 6 周，这样与第二块草地一样．

草的生长速度为$(36\times12-48\times6)\div(12-6)=24$（份/周），

原有草量为 $36\times12-24\times12=144$（份），

第三块草地 10 亩，8 亩 1 周长 24 份，10 亩 1 周长 $24\div8\times10=30$（份）．

8 亩原有草 144 份，10 亩原有草 $144\div8\times10=180$（份）．

设第三块草地 50 头牛可以吃 x 周，

列方程 $50x=180+30x$，

解得 $x=9$．

答：第三块草地可供 50 头牛吃 9 周．

同步练习

1．牧场有一片草地，草每天生长的速度相同．如果 24 匹马 6 天可以把草吃完，20 匹马 10 天可以把草吃完，那么多少匹马 12 天可以把草吃完？（**视频**）

2．牧场上长满牧草，草每天匀速生长．这片牧草可供 10 头牛吃 20 天，可供 15 头牛吃 10 天．问可供 25 头牛吃多少天？

3．牧场上有一片牧草，可供 27 头牛吃 6 周，或供 23 头牛吃 9 周．如果牧草每周匀速生长，可供 21 头牛吃几周？

4．一只船被发现漏水时，已经进了一些水，水匀速进入船内．如果 10 人往外舀水，3 小时舀完；如果 5 人往外舀水，8 小时舀完．如果要求 2 小时舀完，要安排多少人舀水？

5．有一个蓄水池装有 9 根水管，其中一根为进水管，其余 8 根为相同的出水管．进水管以均匀的速度不停地向这个蓄水池注水，后来有人想打开出水管，使池内的水全部排完（这时池内已注入了一些水）．如果把 8 根出水管全部打开，需 3 小时把池内的水全部排完；如果仅打开 5 根出水管，需 6 小时把池内的水全部排完．问：要想在 4.5 小时内把池内的水全部排完，需同时打开几根出水管？

6．有水井一个，不断地涌出泉水，每分钟涌出的水量相等．若用 4 台抽水机 15 分钟可抽完；若用 8 台抽水机 7 分钟可抽完．现用 11 台抽水机多少分钟可以把水抽完？

7．某火车站的检票口检票开始前已经有一些人排队，检票开始后每分钟又有 10 人来排队，一个检票口每分钟能让 25 人通过．只有一个检票口，检票 8 分钟后就没有人排队．如果有 2 个检票口，检票多少分钟后就没有人排队？（**视频**）

8．某车站旅客在检票前若干分钟就开始排队，设每分钟来的旅客人数一样多．从开始检票到等候检票的队伍消失，若同时开 4 个检票口需 30 分钟；同时开 5 个检票口需要 20 分钟，那么同时开 7 个检票口需要多少分钟？为了

15 分钟内不再有人排队，至少需要开多少个检票口？

9．一水池有一根进水管，进水管不间断地进水．由若干根相同的抽水管抽水，若用 24 根抽水管抽水，6 小时即可把池中的水抽完；若用 21 根抽水管抽水，8 小时即可把池中的水抽完．那么用 16 根抽水管抽水，几小时即可把池中的水抽完？

10．一个水池装一个进水管和三个同样的出水管．先打开进水管，等水池存了一些水后，再打开出水管．如果同时打开 2 个出水管，8 分钟后水池空；如果同时打开 3 个出水管，5 分钟后水池空．那么出水管比进水管晚开多少分钟？

同步练习参考答案

1．假设 1 匹马每天吃草 1 份．

草的生长速度为$(20\times10-24\times6)\div(10-6)=14$（份/天）

老草量为 $24\times6-14\times6=60$（份）．

12 天把草吃完需要马$(60+12\times14)\div12=19$（匹），

即 19 匹马 12 天可以把草吃完．

2．假设 1 头牛每天吃草 1 份．

草的生长速度为$(10\times20-15\times10)\div(20-10)\ =5$（份/天）．

原有草量为 $10\times20-5\times20=100$（份）．

设这片牧草可供 25 头牛吃 x 天．

列方程 $100+5x=25x$，

解得 $x=5$．

即这片牧草可供 25 头牛吃 5 天．

3．假设 1 头牛每周吃草 1 份．

草的生长速度为$(23\times9-27\times6)\div(9-6)=15$（份/周）

原有草量为 $27\times6-15\times6=72$（份）．

设这片牧草可供 21 头牛吃 x 周．

列方程 $72+15x=21x$，

解得 $x=12$．

即这片牧草可供 21 头牛吃 12 周．

4．假设每小时每人舀 1 份水．

水进船的速度为$(5\times8-3\times10)\div(8-3)=2$（份/小时）．

船中原有水为 $30-3\times2=24$（份）．

如果要 2 小时舀完需$(24+2\times2)\div2=14$（人）．

5．假设每根排水管每小时排水 1 份．

出水的速度为$(5\times6-8\times3)\div(6-3)=2$（份/小时），

池中原有水 $8\times3-2\times3=18$（份），

如果 4.5 小时排完需开$(18+4.5\times2)\div4.5=6$（根）．

6．假设一台抽水机每分钟抽水 1 份．

每分钟新涌进的水量为$(4\times15-8\times7)\div(15-7)=0.5$（份）．

未抽水时原有水量为 $8\times7-0.5\times7=52.5$（份）．

设 11 台抽水机把水抽完需 x 分钟．

列方程 $52.5+0.5x=11x$．

解得 $x=5$．

即 11 台抽水机 5 分钟可以把水抽完．

7．检票开始后每分钟又有 10 人来排队．

检票开始前排队的人数为 $25\times8-10\times8=120$（人），

设两个检票口检票 x 分钟后就没有人排队．

则 $120+10x=(25\times2)x$，

解得 $x=3$．

即如果有 2 个检票口，检票 3 分钟后就没有人排队．

8．设 1 个检票口 1 分钟检票的人数为 1 份，

则每分钟新来的旅客为$(4\times30-5\times20)\div(30-20)=2$（份）．

原有旅客为 $4\times30-2\times30=60$（份）．

设同时开 7 个检票口需要 x 分钟．

则 $7x=60+2x$，

$x=12$ 分钟．

设 15 分钟无人排队需开 y 个检票口．

则 $15y=60+15\times2$，

$y=6$（个）．

即同时开 7 个检票口，12 分钟无人排队；要 15 分钟无人排队，需开 6 个检票口.

9．假设一根抽水管每小时抽水 1 份.

进水管每小时进水量为$(21\times8-24\times6)\div(8-6)=12$（份），

池中原有水量为 $21\times8-12\times8=72$（份），

设 16 根抽水管抽完水的时间为 x 小时.

则 $72+12x=16x$，

解得 $x=18$.

即用 16 根抽水管抽水，18 小时即可把池中的水抽完.

10．设出水管每分钟排出水池的水为 3 份，

则 2 个出水管 8 分钟所排的水为 $3\times2\times8=48$（份），

3 个出水管 5 分钟所排的水量为 $3\times3\times5=45$（份），

所以每分钟的进水量为$(48-45)\div(8-5)=1$（份），

原有水量为 $48-1\times8=40$（份），

所以，进水管提前开了 $40\div1=40$（分钟）.

即出水管比进水管晚开 40 分钟.

第22讲 分解质因数

知识要点

1．质数和合数

质数：在自然数中，只能被1和它本身整除的数叫质数．如2,3,5,7,…

合数：在自然数中，除了1和它本身之外还有约数，这一类数叫合数．如4,6,8,9,…

注意：1既不是质数也不是合数．这样一来我们又可以把自然数分成以下三类：

$$\text{自然数}\begin{cases}1\\ \text{质数}\\ \text{合数}\end{cases}$$

其中质数和合数的个数都有无限多个．

2．分解质因数

因数：几个数相乘，我们把这几个数都叫做积的因数．

质因数：一个数的因数中是质数的数叫这个数的质因数．如2和3是12的因数也是质因数，而4是12的因数不是质因数．

分解质因数：把一个数写成若干个质数乘积的形式叫做分解质因数．在分解质因数中，如果不考虑质因数的次序，那么分解质因数的结果是唯一的．

分解质因数的方法：

（1）短除法

对75分解质因数．

$$\begin{array}{r|l} 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$75=3\times5\times5=3\times5^2$，

（2）观察法

对 4200 分解质因数.

$$\begin{aligned}4200&=42\times100\\&=6\times7\times4\times25\\&=2\times3\times7\times2\times2\times5\times5\\&=2^3\times3\times5^2\times7.\end{aligned}$$

3．约数的个数

一个数共有多少个约数？我们通过分解质因数可以很快求出.

例如：$48=6\times8=2^4\times3^1$,

列举：1,2,3,4,6,8,12,16,24,48．共 10 个.

$10=(4+1)\times(1+1)$.

任何一个自然数约数的个数为：分解质因数（写成幂指数形式）后指数加 1 的连乘积.

经典题再现

用 462 个大小相等的正方形拼成一个长方形，有多少种不同的拼法？（视频）

解：由 462 个大小相等的正方形拼成的各种长方形，其面积大小不变．可将 462 分解质因数，再变成两数乘积的形式.

$$\begin{aligned}462&=2\times3\times7\times11\\&=2\times231=3\times154=7\times66=11\times42\\&=6\times77=14\times33=22\times21=1\times462.\end{aligned}$$

答：共有 8 种不同的拼法.

典型例题

【例 1】 下面的算式里，□里数字各不相同，求这 4 个数字的和.（视频）

□□×□□=1995

解：这两个两位数的积与 1995 有相同的质因数．$1995=3\times5\times7\times19=35\times57=21\times95$，要满足所填数字各不相同，那么应选 $21\times95=1995$，这时 4 个数字的和是 $2+1+9+5=17$.

答：这 4 个数字的和是 17.

【例 2】 2205 乘以一个自然数 a，乘积是一个整数的平方，那么 a 最小是多少？（视频）

解：

$$\begin{array}{r|l}
5 & 2205 \\ \hline
3 & 441 \\ \hline
7 & 147 \\ \hline
7 & 21 \\ \hline
 & 3
\end{array}$$

$2205=3\times3\times5\times7\times7$.

质因数 3 的个数有 2 个，质因数 7 的个数有 2 个，质因数 5 的个数只有 1 个.

因此 a 最小是 5.

答：a 最小是 5.

说明：要想乘积是一个整数的平方，则 2205 与 a 中所含有的每个质因数的个数一定有偶数个.

【例 3】 72 的约数有多少个？这些约数的和是多少？（视频）

解：我们先对 72 进行分解质因数，$72=2^3\times3^2$，

72 的约数有 1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72.

72 的约数共有 $(3+1)\times(2+1)=12$（个）.

其和为 $1+2+3+4+6+8+9+12+18+24+36+72=195$.

【例 4】 小华是中学生．妹妹问他：“你班数学竞赛，你得多少分？是第几名？”小华说：“我得的名次和我的岁数与我的分数的乘积是 2910.”问小华得了多少分？第几名？多少岁？（视频）

分析：先分解，再重组．重组时注意中学生的大概年龄.

解：由于 $2910=2\times3\times5\times97=97\times2\times15$，

所以小华得了 97 分，第 2 名，15 岁.

【例 5】 将下面 8 个数平均分成两组，使这两组数的乘积相等.（视频）

2,5,14,24,27,55,56,99.

分析：要使 8 个数平均分成两组，那么各分出的 4 个数所含的质因数相同，质因数的个数也相同.

解：因为 $14=2\times7$　$55=5\times11$　$24=2\times2\times2\times3$　$56=2\times2\times2\times7$，

$27=3\times3\times3$　$99=3\times3\times11$.

可以看出，这 8 个数中，共含有 8 个 2、6 个 3、2 个 5、2 个 7 和 2 个

11．根据题意，每组数中应含有 4 个 2、3 个 3、1 个 5、1 个 7 和 1 个 11．经排列为：

第一组：5,14,24,99．

第二组：2,27,55,56．

【例 6】 有 3 个自然数 a,b,c．已知 $a\times b=10$，$b\times c=35$，$a\times c=14$，求 $a\times b\times c$ 是多少？**（视频）**

解：$10=2\times5$，$35=5\times7$，$14=2\times7$，

$(a\times b)\times(b\times c)\times(a\times c)=2\times5\times5\times7\times2\times7$，

$a^2\times b^2\times c^2=2^2\times5^2\times7^2$，

$(a\times b\times c)^2=(2\times5\times7)^2$，

$a\times b\times c=2\times5\times7=70$．

难题精讲

有多少个两位数，在它的十位数字与个位数字之间写一个零，得到的三位数能被原两位数整除？**（视频）**

解：设这样的两位数的十位数字为 A，个位数字为 B，由题意依据数的组成知识，可知 $100A+B$ 能被 $10A+B$ 整除．

因为 $100A+B=90A+(10A+B)$，由数的整除性质可知 $90A$ 能被 $10A+B$ 整除．这样只要把 $90A$ 分解组合，就可以推出符合条件的两位数．

$90A=2\times3^2\times5\times A$．

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$90A$	10×9 15×6 18×5	20×9	30×9	40×9 45×8	50×9	60×9	70×9	80×9	90×9
$\overline{AB}$	10,15 18	20	30	40,45	50	60	70	80	90

所以，符合条件的两位数共 12 个．

同步练习

1．（1）144 的全部约数有多少个？这些约数的和是多少？

（2）360 的全部约数有多少个？这些约数的和是多少？

2．有少先队员 60 人去春游，辅导员要求分成人数相等的小组去爬山，每组不少于 6 人，不多于 15 人．有哪几种分法？

3．学校要进行跳绳比赛，决定由三、四、五、六年级各出一名代表参加，这 4 名同学的年龄一个比一个大一岁，他们的年龄的乘积是 11880，问这 4 个同学的年龄各是多少？

4．甲、乙两人射击，各打 5 枪，（每次不超过 10 环，不小于 0 环）他们的 5 次成绩的连乘积都为 1764，甲的成绩总和比乙的成绩总和少 4 环，求甲、乙的总环数？

5．195 名同学参加团体操比赛，问他们能否排成一个长方形队伍（行数和列数都大于 1）？若能，共有几种排法？

6．将下列 8 个数 14,33,35,30,75,39,143,169 平分成两组，使这两组数的乘积相等，可以怎样分？试说明理由．

7．有 3 个自然数 a,b,c，已知 $a\times b=35$，$b\times c=55$，$c\times a=77$，求 $a\times b\times c$ 的积是多少？**（视频）**

8．把 232323 的全部质因数的和表示为 $\overline{ab}$，那么 $a\times b\times \overline{ab}$ 等于多少？**（视频）**

9．下面有 3 张卡片

$$\boxed{3}\quad \boxed{2}\quad \boxed{1}$$

从中抽出 1 张、2 张、3 张，按任意次序排起来，得到不同的一位数、两位数、三位数．把所得数中的质数写出来．

同步练习参考答案

1．（1）$144=2^4\times3^2$，

约数的个数为$(4+1)\times(2+1)=15$(个)．

约数的和为$(1+2+2^2+2^3+2^4)\times(1+3+3^2)=403$．

（2）$360=2^3\times3^2\times5^1$．

约数的个数为$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$（个）．

约数的和为$(1+2+2^2+2^3)\times(1+3+3^2)\times(1+5)=1170$．

2．$60=2\times2\times3\times5$，60 的约数中不小于 6，不大于 15 的有 6,10,12,15 四

个．根据题意，每组可分 6 人、10 人、12 人、15 人共 4 种分法．

每组 6 人可分 $60\div6=10$（组）；

每组 10 人可分 $60\div10=6$（组）；

每组 12 人可分 $60\div12=5$（组）；

每组 15 人可分 $60\div15=4$（组）．

3．本题实际就是要把 11880 分解成 4 个连续自然数乘积的形式．

$11880=2^3\times3^3\times5\times11$

$=2\times2\times2\times3\times3\times3\times5\times11$

$=9\times10\times11\times12$．

所以，4 个学生的年龄分别是 9 岁、10 岁、11 岁、12 岁．

4．先将 1764 分解，然后再适当组合，使其满足题目条件．

$1764=1\times4\times9\times7\times7=2\times3\times6\times7\times7$．

$(1+4+9+7+7)-(2+3+6+7+7)=4$（环）．

$1+4+9+7+7+2+3+6+7+7=52$（环）．

5．这个题的实质就是看 195 能否写成两个都大于 1 的自然数的乘积，若能有几种写法．

因为 $195=3\times5\times13$，

所以可以办到，且有下列 3 种：

$195=15\times13$，$195=3\times65$，$195=39\times5$．

所以，可得三种排法．

6．先分解质因数．

$14=2\times7$；　$33=3\times11$；　$35=5\times7$；$30=2\times3\times5$；$75=3\times5\times5$；

$39=3\times13$；$143=11\times13$；$169=13\times13$．

这 8 个数的积为 $2^2\times3^4\times5^4\times7^2\times11^2\times13^4$，即分成的两组各自的积应为 $2\times3^2\times5^2\times7\times11\times13^2$．

于是可选 14,33,75,169 为一组，30,35,39,143 为一组．

（分组方法不止这一种，只要每组积为 $2\times3^2\times5^2\times7\times11\times13^2$ 即可）．

7．因为 $a\times b\times b\times c\times c\times a=35\times55\times77=5\times7\times5\times11\times7\times11$，

即 $(a\times b\times c)\times(a\times b\times c)=(5\times7\times11)\times(5\times7\times11)$，

所以 $a\times b\times c=5\times7\times11=385$．

8．因为 $10101=3\times7\times13\times37$，所以，$232323=23\times10101=23\times3\times7\times13\times37$．

则 $\overline{ab}$=23+3+7+13+37=83.

a=8，b=3.

$a\times b\times\overline{ab}$=8×3×83=1992.

9．从 3 张卡片中任抽一张，有 3 种可能，即一位数有 3 个，分别为 1,2,3，其中只有 2,3 是质数.

从 3 张卡片中任抽 2 张，组成的两位数共 6 个．但个位数字是 2 的两位数和个位与十位上数字之和是 3 的倍数的两位数，都不是质数．所以，两位数的质数只有 13,23,31.

因为 1+2+3=6，6 能被 3 整除，所以，由 1,2,3 按任意次序排起来所得的三位数，都不是质数.

故满足要求的质数有 2,3,13,23,31 这 5 个.

第23讲 最大公约数与最小公倍数

知识要点

1．最大公约数与最小公倍数的关系

两个数的最大公约数与最小公倍数的乘积等于这两个数的乘积．

$$a\times b=(a,\ b)\times[a,\ b]$$

2．辗转相除法

当求两个较大数的最大公约数时，直接用短除法比较困难．我们用辗转相除法比较方便．

辗转相除法的步骤：

（1）用两个数中的大数除以小数，得到余数．

（2）用（1）中的小数替换（1）中的大数，用（1）中的余数替换（1）中的小数，返回（1）的运算．得到新余数，…

（3）直到小数为0时，大数即为最大公约数．

例如，要求1234和567的最大公约数，

可以写成下面的形式:

$(1234,567)=(567,100)=(100,67)=(67,33)=(33,1)=(1,0)=1$．

即1234和567的最大公约数为1．

经典题再现

求1,2,3,4,5,6,7,8,9,10这10个数的最小公倍数．（**视频**）

解：选择8，则8的倍数一定是2和4的倍数．

同理，选择9，则9的倍数一定是3的倍数．

既是2的倍数又是3的倍数，一定是6的倍数．

再选5，既是2的倍数又是5的倍数，一定是10的倍数．

所以，我们最后求5,7,8,9的最小公倍数即可．

[5,7,8,9]=5×7×8×9=2520．

答：这 10 个数的最小公倍数是 2520．

典型例题

【例 1】 用辗转相除法求(1608,737)．（**视频**）

解：利用(被除数，除数)=(除数，余数)的方法来做．

(1608,737)=(737,134) =(134,67) =(67,0)=67．

所以 (1608,737)=67．

【例 2】 求 403,527,713 的最小公倍数．（**视频**）

分析: 3 个数没有办法直接用辗转相除法，我们可以用辗转相除法先求两个数的最大公约数，然后再拿这两个数的最大公约数和第三个数求最大公约数．

解：(403,527)=(403,124)=(124,31)=31，

再用 31 与第三个数求最大公约数，

(31,713)=31，

所以(403,527,713)=31．

403÷31=13, 527÷31=17,713÷31=23．

[403,527,713]=31×13×17×23=157573．

【例 3】 有一堆豆子，每 5 个一数，6 个一数，11 个一数都多 1 个，这堆豆子至少有多少个？（**视频**）

解：这堆豆子比 5 的倍数、6 的倍数和 11 的倍数都多 1,

5, 6, 11 的最小公倍数是 5×6×11=330．

所以，这堆豆子有 331 个．

【例 4】 两个数的乘积是 3072，最大公约数是 16，求这两个数．（**视频**）

解：设两数分别为甲和乙，知道最大公约数为 16，用短除法．

$$\begin{array}{r|cc} 16 & \text{甲} & \text{乙} \\ \hline & \square & \triangle \end{array}$$

□与△分别是甲、乙除以 16 的商．

由于 16 是最大公约数，所以，□与△互质，并且甲=16×□，乙=16×△．

由甲×乙=3072，得

□×△=3072÷(16×16)=12．

12=1×12=3×4．

当分解成 1×12 时：

两个数分别为 16×12=192 ,16×1=16;

当分解成 3×4 时：

两数分别为 16×3=48,16×4=64.

所以，这两个数为 192,16 或 48,64.

【例 5】 在一条 300 米长的路的一侧植树，原计划每隔 4 米种一棵树，画好记号后发现距离太近，又改为每隔 6 米种一棵树．问还要重新做多少个记号？擦掉多少个记号？（**视频**）

分析：重新做的记号为只是 6 的倍数，而不是 4 的倍数的记号；擦掉的记号为只是 4 的倍数而不是 6 的倍数的记号．

解：原来做了 300÷4+1=76（个）记号，改为间隔 6 米要做 300÷6+1=51（个）记号．

[4,6]=12，300÷12+1=26,

26 个记号不用重做，还要新做 51–26=25（个）记号，擦掉 76–26=50（个）记号．

【例 6】 李老师带领全班学生去种树，学生恰好被平均分成 4 个小组，总共种树 667 棵，如果师生每人种的棵数一样多，那么这个班共有多少名学生？（**视频**）

解：因为 667=23×29，所以这班师生每人种的棵数只能是 667 的约数 1,23,29,667．显然，每人种 667 棵是不可能的．

当每人种 29 棵树时，全班人数应是 23–1=22（人），但 22 不能被 4 整除，不可能．

当每人种 23 棵树时，全班人数应是 29–1=28（人），且 28 恰好是 4 的倍数，符合题目要求．

当每人种 1 棵树时，全班人数应是 667–1=666，但 666 不能被 4 整除，不可能．

所以，该班共有 28 名学生．

难题精讲

已知 a 与 b 的最大公约数是 12，a 与 c 的最小公倍数是 300，b 与 c 的最

小公倍数也是300，那么满足上述条件的自然数a,b,c共有多少组？（**视频**）

（例如：$a=12$，$b=300$，$c=300$，与 $a=300$，$b=12$，$c=300$ 是不同的两个自然数组）

解：先将12,300分别进行质因数分解.

$12=2^2\times 3$，

$300=2^2\times 3\times 5^2$，

① 确定a的值．依题意a只能取12或12×5或12×25.

② 确定b的值.

当$a=12$时，b可取12，或12×5，或12×25；

当$a=60$或300时，b都只能取12.

所以，满足条件的a,b共有5组，即

$\begin{cases}a=12\\b=12,\end{cases}$ $\begin{cases}a=12\\b=60,\end{cases}$ $\begin{cases}a=12\\b=300,\end{cases}$ $\begin{cases}a=60\\b=12,\end{cases}$ $\begin{cases}a=300\\b=12.\end{cases}$

③ 确定a,b,c的组数.

对于上面a,b的每种取值，依题意，c均有6个不同的值，即

5^2，$5^2\times 2$，$5^2\times 2^2$，$5^2\times 3$，$5^2\times 2\times 3$，$5^2\times 2^2\times 3$，即25,50,100,75,150,300.

所以满足条件的自然数a,b,c共有$5\times 6=30$（组）.

同步练习

1．用辗转相除法求：

（1）(23902,7807)；

（2）(15004,4943)；

（3）(465, 372, 558)；

（4）(27090,21672,11353).

2．已知两个数的积是1800，这两个数的最大公约数是15，这两个数分别是多少？（**视频**）

3．已知两个三位数的最大公约数是29，最小公倍数是4959，求它们的差是多少？

4．一块长90厘米、宽42厘米的长方形铁片，剪成边长为整数厘米，面积都相等的小正方形铁片，恰无剩余，至少要剪多少块？（**视频**）

5．5 个连续自然数的和分别被 2,3,4,5,6 整除，能满足此条件最小的一组数是多少？

6．从小亮家到学校，原来每隔 50 米竖一根电线杆，包括两端的两根一共有 55 根电线杆，现在要改成每隔 60 米竖一根电线杆，除两端的两根不需移动外，中间还有多少根不必移动？（**视频**）

7．一种长方形砖，长 42 厘米，宽 26 厘米，用这种砖铺一块正方形地，至少需要用多少块砖？

8．在 358 的后面补上 3 个数字组成一个六位数，使得它分别能被 3,4,5 整除，这样的六位数最小是多少？

9．一筐梨，按每份 2 个梨分多 1 个，每份 3 个梨分多 2 个，每份 5 个梨分多 4 个．问筐里至少有多少个梨？

10．动物园的饲养员给 3 群猴子分花生，如只分给第一群，则每只猴子可得 12 粒；如只分给第二群，则每只猴子可得 15 粒；如只分给第三群，则每只猴子可得 20 粒．那么平均分给 3 群猴子，每只猴子可得多少粒花生？

同步练习参考答案

1．（1）(23902,7807)=(7807, 481)=(481, 111)=(111, 37)=(37,0)=37．

（2）(15004,4943)=(4943, 175)=(175, 43)=(43, 3)=(1,0)=1．

（3）因为(465, 372)=(372, 93)=(93,0)=93，又因为(558, 93)=(93,0)=93，

所以(465, 372, 558)=93．

（4）因为(27090,21672)=(21672,5418)=(5418,0)=5418，

又因为(11353,5418)=(5418,516)=(516,258)=(258,0)=258，

所以(27090,21672,11353)=258．

2．1800÷15÷15=8，把 8 分成两个互质的数 8=1×8，15×1=15，15×8=120．这两个数分别是 15,120．

3．4959÷29=171=3×3×19，

$$\begin{array}{r|cc} 29 & A & B \\ \hline & 9 & 19 \end{array}$$

A=29×9=261，B=29×19=551，$B-A$=551−261=290．

4．(90,42)=6，

共有 42÷6=7（行），90÷6=15（列）．

共 7×15=105（块）.

5．因为[2,3,4,5,6]=60，60=5×12（5 个连续自然数的和是中间数的 5 倍）

所以满足此条件的最小的一组数是 10,11,12,13,14．

6．小亮家到学校的距离是 50×(55−1)=2700（米）．

[50,60]=300，从第一根开始，每隔 300 米的那一根不动，2700÷300=9．

这 9 根包括了最后 1 根，中途不需移动的是 9−1=8（根）.

7．[42,26]=566，566×566÷(42×26)=273（块）.

8．能同时被 3,4,5 整除，也就是能被[3,4,5]=60 整除．这样的六位数最小可能是 358000，用它除以 60 余 40，给 358000+20=358020，就刚好是 60 的倍数，也就是满足条件的最小六位数.

9．如果向筐里添加一个梨，那么这筐梨就是 2,3,5 的倍数，所以，筐里至少有梨[2,3,5]−1=30−1=29（只）.

10．花生总数=12×第一群猴子只数

=15×第二群猴子只数

=20×第三群猴子只数.

由此知，花生总粒数是 12,15,20 的公倍数，其最小公倍数是 60.

所以，花生总数是 60,120,180,…

第一群猴子只数：5,10,15,…

第二群猴子只数：4,8,12,…

第三群猴子只数：3,6,9,…

如取第一组数，3 群猴子每只分得 60÷(5+4+3)=5（粒）;

如取第二组数，3 群猴子每只分得 120÷(10+8+6)=5（粒）;

…

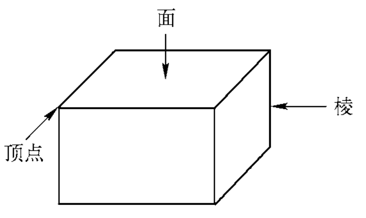
因此，不论取哪一组答案，均有每只猴子分得 5 粒花生.

第24讲　长方体与正方体

知识要点

长方体与正方体是我们常见的立体图形．长方体是三维图形，它有长、宽、和高．正方体是长方体的特例，当长、宽、高相等时，长方体就变成正方体了．

长方体有 6 个面，12 条棱，8 个顶点．当我们在平面上画长方体时，只能画出 3 个面，另外 3 个面被挡住了，如下图所示．



长方体和正方体体积和表面积的公式：

长方体的体积=长×宽×高

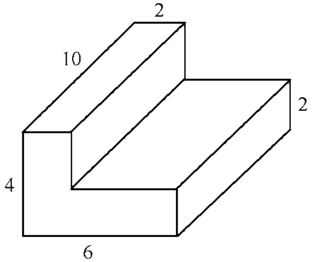
正方体的体积=棱长×棱长×棱长

长方体的表面积=2×(长×宽+长×高+宽×高)

正方体的表面积=棱长×棱长×6

经典题再现

一个零件形状大小如下图所示：算一算，它的体积是多少立方厘米，表面积是多少平方厘米．（视频）



分析：将这个立体图看成长、宽、高分别为 6,10,4 的长方体截去了一个小长方体．

解：先算长宽高分别为 6,10,4 的长方体体积，再减去去掉的小长方体体积．

去掉的小长方体长宽高分别为 4,10,2．

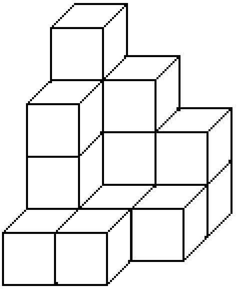
这个零件的体积为 6×10×4–4×10×2=160（立方厘米）．

这个零件的表面积为(10×6+10×4+6×4) ×2–2×4×2=232（平方厘米）．

答：这个零件的体积为 160 立方厘米，表面积为 232 平方厘米．

典型例题

【例 1】 下图是由 16 块棱长为 3 厘米的小正方体垒成的，它的表面积是多少平方厘米？**（视频）**



分析：我们按层计算，仔细观察每一层有多少个面，然后再把每一层的面积相加，求出图形的面积．

解：第一层有 8 个小正方体共 24 个面，

面积为 3×3×24=216（平方厘米）．

第二层有 4 个小正方体共 11 个面，

面积为 3×3×11=99（平方厘米）．

第三层有 3 个小正方体共 10 个面，

面积为 $3\times3\times10=90$（平方厘米）.

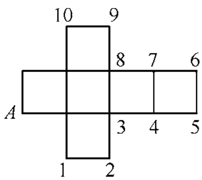
第四层有 1 个小正方体共 5 个面，

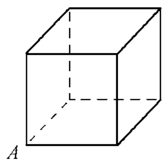
面积为 $3\times3\times5=45$（平方厘米）.

表面积为 $216+99+90+45=450$（平方厘米）.

答：该图形的表面积是 450 平方厘米.

【例 2】 下图是一个正方体纸盒的展开图．当折叠成纸盒时，A 点与哪些点重合？（**视频**）

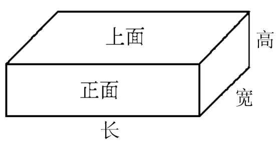




解：我们先看一个正方体，如上右图所示，从图中可以看出与 A 点重合的点有 2 个，而且是 1,2,3,4,5 这几点中的 2 个点，通过观察应该是点 1 和 5．

答：A 点与点 1 和 5 重合．

【例 3】 下图是一个长方体，它的正面和上面的面积和是 209 平方厘米，如果它的长、宽、高都是质数，那么这个长方体的体积是多少？（**视频**）



分析：正面面积=长×高，上面面积=长×宽．即长×高+长×宽=209（平方厘米），长×(高+宽)=209（平方厘米）．将 209 分解质因数，根据条件：长、宽、高都是质数，判断长、宽、高的取值，最后求出体积．

解：依题意 长×高+长×宽=209（平方厘米），

长×(高+宽)=209（平方厘米）.

因为，$209=11\times19=11\times(2+17)$，

又由于长、宽、高都是质数，那么长=11，高=2，宽=17．

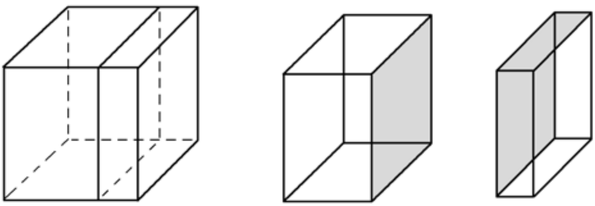
如果长=19，则宽+高=11，而 11 无法写成两个质数的和．

所以，长方体的体积$=11\times17\times2=374$（立方厘米）.

答：这个长方体的体积是 374 立方厘米.

【例 4】 一个棱长为 6 分米的正方体木块，如果全部锯成棱长为 2 分米的小正方体，则表面积增加了多少平方分米？（**视频**）

解：如下图所示.



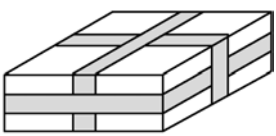
要将正方体木块全部锯成棱长为 2 分米的小正方体，应按照 3 个不同的方向各切 2 次，一共要切 6 次，每切一次要增加两个面的面积.

每切一次其表面积就增加 $6\times6\times2=72$（平方分米）.

所以切完后表面积共增加 $72\times6=432$（平方分米）.

答：表面积共增加了 432 平方分米.

【例 5】 某工人用薄木板钉成一个长方体的邮件包装箱，并用 3 条尼龙编织条如下图所示在 3 个方向上加固．所用尼龙编织条的长分别为 365 厘米、405 厘米、485 厘米．若每个尼龙条加固时接头处都重叠 5 厘米，那么，这个长方体包装箱的体积是多少立方米？（**视频**）



解：长方体的高+宽$=(365-5)\div2=180$（厘米），

高+长$=(405-5)\div2=200$（厘米），

长+宽$=(485-5)\div2=240$（厘米），

三式相加得 2×长+2×宽+2×高=620（厘米），

即长+宽+高=310（厘米）.

求得长$=310-180=130$（厘米），

宽$=310-200=110$（厘米），

高$=310-240=70$（厘米）.

所以长方体的体积为

70×110×130=1001000（立方厘米）=1.001（立方米）.

答：这个长方体包装箱的体积是 1.001 立方米.

【例 6】 正方体的每一条棱长是一个一位数，表面的每个正方形面积是一个两位数，整个表面积是一个三位数．而且若将正方形面积的两位数中两个数字调过来恰好是三位数的十位与个位上的数字．问这个正方体的体积是多少？（**视频**）

解：根据“正方体的每一条棱长是一个一位数，表面积的每个正方形面积是一个两位数，整个表面积是一个三位数”的条件，可以判断正方体的棱长有 5,6,7,8,9 这 5 种可能性.

由下表的数据及“将正方形面积的两位数中两个数码调过来恰好是三位数的十位数上与个位数上的数码”可知这个正方体的棱长是 7.

棱长	5	6	7	8	9
正方形面积	25	36	49	64	81
全面积	150	216	294	384	486

因此，这个长方体的体积是 7×7×7=343.

答：这个正方体的体积是 343.

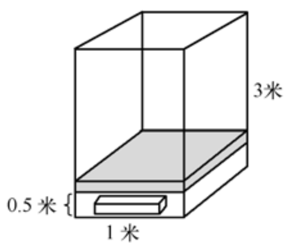
难题精讲

一个长方形的水池，从里面量得底面是边长为 1 米的正方形，水池高 3 米，内装有 0.5 米深的水．现有一根长方体的铁柱，长、宽、高分别为 0.2 米、0.2 米、0.8 米，将铁柱放入水池中，使其一面紧贴池底.

（1）如果将铁柱横着放入水池中，水池中的水会升高多少米？

（2）如果将铁柱立着放入水池中，水池中的水会升高多少米？（铁柱没有完全浸没，结果精确到 0.01）（**视频**）

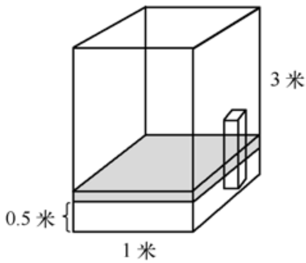
解：（1）将铁柱横着放入水池，如下图所示（图中阴影部分为升高的水面）.



由已知条件可知，水面上升部分的体积就是铁柱的体积，即 $0.2\times0.2\times0.8=0.032$（立方米）.

水面上升部分是一个长方体，其底面积就是长方形水池的底面，即 $1\times1=1$（立方米），所以，水面上升的高是 $0.032\div1=0.032$（米）.

（2）如果将铁柱立着放入水池中，如下图所示.



由于铁柱竖着放，不能完全浸没水中，此时，长方形水池中水的体积仍然是 $1\times1\times0.5=0.5$（立方米）. 但由于铁柱有一部分浸在水中，并且有一个面紧贴池底.

因为是竖放，这个面的面积是 $0.2\times0.2=0.04$（平方米），

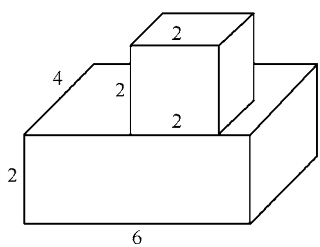
因此，池中水的底面积应是 $1\times1-0.04=0.96$（平方米）.

这时池中水的高度应是 $0.5\div0.96=0.521$（米）.

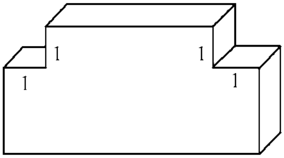
而原来水的高度是 0.5 米，则水面上升的高度是 $0.521-0.5=0.021$（米）.

同步练习

1．有一个形如下图的零件，求它的体积和表面积.（单位：厘米）（**视频**）

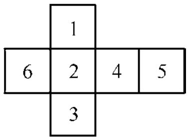


2．有一个长 8 厘米、宽 1 厘米、高 3 厘米的长方体木块，在它的左右两角各切掉一个正方体，如下图所示．求切掉正方体后的表面积和体积．（**视频**）



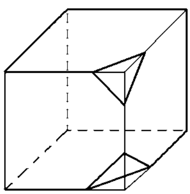
3．一个正方体切掉一个角，变成 14 条棱，应怎样切？

4．把形如下图的纸片折成一个正方体，相交于同一顶点的 3 个面上的数的和最大是多少？

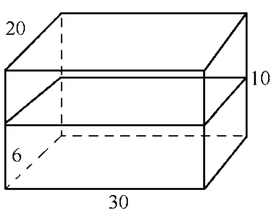


5．把一个长 25 厘米、宽 10 厘米、高 4 厘米的木块，锯成若干个大小相等的正方体，然后拼成一个大正方体．问这个大正方体的表面积是多少平方厘米？

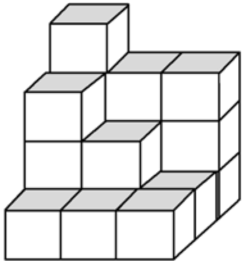
6．如下图所示，立方体的每个角都被切下一小块（图中只画被切的两个角），且被切去的棱小于原正方体棱长的一半，则所得到的几何体有多少条棱？



7．有一个长方体容器，如下图所示．长 30 厘米，宽 20 厘米，高 10 厘米，里面有水深 6 厘米．如果把这个容器盖紧，再朝左竖起来．里面的水深应该是多少厘米？

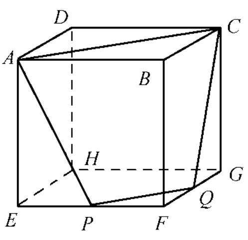


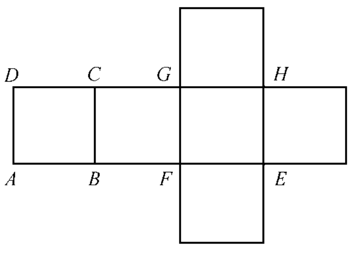
8．把 19 个边长为 2 厘米的正方体重叠起来堆成如下图所示的立方体，这个立方体的表面积是多少平方厘米？



9．有大、中、小 3 个正方体水池，它们的内边长分别是 6 米、3 米、2 米．把两堆碎石分别沉没在中、小水池的水里，两个水池的水面分别升高了 6 厘米和 4 厘米．如果将这两堆碎石都沉没在大水池的水里，大水池的水面升高多少厘米？

10．下左图是正方体，四边形 $APQC$ 是表示用平面截正方体的截面，截面的线表现在展开图的哪里呢？把大致的图形在右面展开图里画出来．



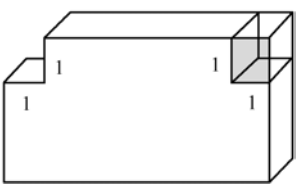


同步练习参考答案

1．体积为 2×4×6+2×2×2=48+8=56（立方厘米）．

表面积为(2×4+2×6+4×6) ×2+2×2×6−2×2×2=104（平方厘米）．

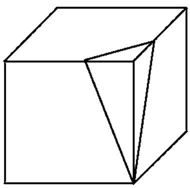
2．如下图所示，表面积比原长方体的表面积少了形如图上阴影的边长为 1 的 4 个小正方形．



体积为 $8\times1\times3-1\times1\times1\times2=24-2=22$（立方厘米）.

表面积为 $(8\times1+8\times3+1\times3)\times2-1\times1\times4=70-4=66$（平方厘米）.

3．正方体共 12 条棱，增加 3 条，切掉了 1 条，共 $12+3-1=14$（条）．如下图所示．



4．想象这张纸片折成正方体后各个面的位置关系，写有数字 6 这一面应和写有数字 5 的这一面是相邻的，另外由于 3 比 1 大，所以相交于同一顶点的 3 个面上的数的和最大是 $6+5+3=14$.

5．由于 $(25,10,4)=1$，所以这个长方体木块只能锯成边长为 1 厘米的正方体，才能使其大小相等.

$25\times10\times4=1000=10\times10\times10$，

即可组成边长为 10 的正方体，

表面积为 $10\times10\times6=600$（平方厘米）.

6．正方体原有 12 条棱，8 个角，每切掉一个角增加 3 条棱，切掉 8 个角后共有棱 $12+3\times8=36$（条）.

7．水的体积为 $30\times20\times6=3600$（立方厘米）.

由于水的体积不变，所以朝左竖起来后，里面的水深是 $3600\div(20\times10)=18$（厘米），

即竖起来后里面的水深是 18 厘米.

8．这个立方体的表面由 $3\times3\times2+8\times2+10\times2=54$（个）小正方形组成，故表面积为 $4\times54=216$（平方厘米）.

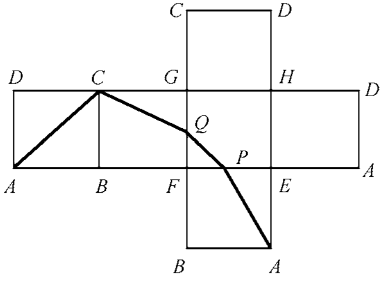
9．放在中水池里的碎石的体积为 $3\times3\times0.06=0.54$（立方米），

放在小水池里的碎石的体积为 $2\times2\times0.04=0.16$（立方米），

则两堆碎石的体积和为 $0.54+0.16=0.7$（立方米），现在放到底面积为 $6\times6=36$（平方米）的大水池中，则使大水池的水面升高 $0.7\div36=\frac{7}{360}$（米）

$=\frac{700}{360}$（厘米）$=1\frac{17}{18}$（厘米）.

10．截面的线在展开图中如下图所示.



第 25 讲　分数与小数的互化

知识要点

1．分数化小数

分数化小数的方法是分子除以分母，其结果可分为有限小数和无限循环小数.

例如：

$\frac{1}{2}=0.5$，

$\frac{1}{3}=0.33\cdots=0.\dot{3}$，

$\frac{5}{6}=0.8\dot{3}$.

循环小数又分为纯循环小数和混循环小数两种，如上面的$0.\dot{3}$和$0.8\dot{3}$.

2．小数化分数

（1）有限小数化分数：$0.25=0.25\times100\div100=25\div100=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$.

（2）循环小数化分数．我们通过后面的例题来说明方法.

经典题再现

将$\frac{123}{7}$化成小数，从左向右取 1000 个数字，求这些数字的和，并求这 1000 个数字的积中从右向左取，第 166 个数字是多少？**（视频）**

解：$\frac{123}{7}=17.\dot{5}7142\dot{8}$，每一个循环节的数字之和为 5+7+1+4+2+8=27，又因为$17.\dot{5}7142\dot{8}$这个数在小数点前有 2 个数字，即 1 和 7，因为 998 ÷ 6=166×6+2，说明小数点后 998 个数字内含有 166 个循环节.

所以$17.\dot{5}7142\dot{8}$从左向右取 1000 个数字，这些数字的和为

166×27+1+7+5+7=4502.

又因为每个循环节里都含有 2 和 5，所以每个循环节的积中一定有因数 10．取出的 1000 个数中含有 166 个循环节，1000 个数的积中一定有 10^{166} 这个因数，由此可见乘积中从右向左取得 166 个数字全是 0，所以第 166 个数字是 0．

典型例题

【例 1】 将 $5.\dot{1}2\dot{3}$ 化成分数．（**视频**）

解：$0.\dot{1}2\dot{3}\times1000=123.\dot{1}2\dot{3}$，

$0.\dot{1}2\dot{3}\times1000-0.\dot{1}2\dot{3}=123$，

$0.\dot{1}2\dot{3}\times999=123$，

所以 $0.\dot{1}2\dot{3}=\dfrac{123}{999}$，

$5.\dot{1}2\dot{3}=5\dfrac{123}{999}=5\dfrac{41}{333}$．

【例 2】 把 $0.49\dot{2}$ 和 $3.4\dot{1}\dot{3}$ 化成分数．（**视频**）

解：（1）因为 $0.49\dot{2}\times1000=492.\dot{2}$，

$0.49\dot{2}\times100=49.\dot{2}$．

两式的左右两边分别相减，得到 $0.49\dot{2}\times900=492-49$，

所以，$0.49\dot{2}=\dfrac{492-49}{900}=\dfrac{443}{900}$．

（2）$3.4\dot{1}\dot{3}=3+0.4\dot{1}\dot{3}$

同理，$0.4\dot{1}\dot{3}\times1000=413.\dot{1}\dot{3}$，

$0.4\dot{1}\dot{3}\times10=4.\dot{1}\dot{3}$，

所以，$0.4\dot{1}\dot{3}\times990=413-4$，

$0.4\dot{1}\dot{3}=\dfrac{413-4}{990}=\dfrac{409}{990}$，

$3.4\dot{1}\dot{3}=3\dfrac{409}{990}$．

【例 3】 计算 $0.\dot{1}\dot{2}+0.\dot{2}\dot{3}+0.\dot{3}\dot{4}+\cdots+0.\dot{8}\dot{9}$．（**视频**）

解：$$\text{原式}=\frac{12}{99}+\frac{23}{99}+\frac{34}{99}+\cdots+\frac{89}{99}$$

$$=\frac{1}{99}\times(12+23+34+\cdots+89)$$

$=\frac{1}{99}\times 404$

$=4\frac{8}{99}$.

【例 4】 计算$1.\dot{9}+3.\dot{9}+5.\dot{9}+\cdots+99.\dot{9}$.（**视频**）

分析：小数部分都是$0.\dot{9}$，所以，可以将整数部分和小数部分分开算．然后再考虑将$0.\dot{9}$化成分数．

解：因为，$0.\dot{9}=\frac{9}{9}=1$，

所以，原式=1+3+5+…+99+$0.\dot{9}\times 50$

=2500+50

=2550．

【例 5】 某学生将$1.2\dot{3}$乘以一个 a 数时，把$1.2\dot{3}$误看成 1.23，使乘积比正确结果减少 0.3．问正确结果该是多少？（**视频**）

解：由题意得$1.2\dot{3}a-1.23a=0.3$，即$0.00\dot{3}a=0.3$，所以，$\frac{3}{900}a=\frac{3}{10}$，解得 $a=90$，所以$1.2\dot{3}a=1.2\dot{3}\times 90=1\frac{23-2}{90}\times 90=\frac{111}{90}\times 90=111$．

答：正确结果应该是 111．

【例 6】 纯循环小数$0.\dot{A}B\dot{C}$化成最简分数时，分子与分母的和是 149，问这个循环小数是多少？（**视频**）

解：$0.\dot{A}B\dot{C}=\frac{\overline{ABC}}{999}$，999=3×3×3×37，

分子分母约分后，分子分母的和是 149，至少要约掉 9．

如果约掉 9，分母是 111，分子是 149–111=38，

38 ÷ 111=$0.\dot{3}4\dot{2}$．

如果约掉 27，149–37=112，不是真分数．

同理，约掉其余的数，不是真分数．

答：这个循环小数是$0.\dot{3}4\dot{2}$．

难题精讲

有 30 个数：1.64，$1.64+\frac{1}{30}$，$1.64+\frac{2}{30}$，$1.64+\frac{3}{30}$，…，$1.64+\frac{29}{30}$．如果

取每个数的整数部分，并将这些整数相加，那么它们的和是多少？（**视频**）

解：由于 $1.64+\frac{10}{30}<2$，而 $1.64+\frac{11}{30}>2$，所以这一串数的前 11 个数的整数部分全是 1.

又因为 $1.64+\frac{29}{30}<3$，所以这一串数的后 19 个的整数部分全为 2.

那么，总和=1×11+2×19=49.

同步练习

1．将下列分数化为循环小数，并求小数点后第 100 位上的数字.（**视频**）

（1）$\frac{2}{7}$；　　（2）$\frac{4}{13}$；　　（3）$\frac{25}{74}$.

2．将 $\frac{1}{7}$ 化成小数时，小数点后 100 个数字的和是多少？

3．将下列分数化成小数.

（1）$\frac{7}{24}$；　　（2）$\frac{6}{27}$；　　（3）$\frac{161}{120}$；　　（4）$\frac{121}{440}$.

4．将下列循环小数化为最简分数.（**视频**）

（1）$0.\dot{7}$；　　（2）$0.\dot{8}\dot{1}$；　　（3）$1.\dot{2}1\dot{6}$；　　（4）$0.25\dot{9}\dot{4}$.

5．循环小数 $0.\dot{2}83754\dot{6}$ 与 $0.\dot{9}721\dot{6}$ 在小数点后第多少位时，首次在该位上的数字都是 6？

6．计算 $0.0\dot{1}+0.1\dot{2}+0.2\dot{3}+0.3\dot{4}+0.7\dot{8}+0.8\dot{9}$.

7．已知下式中不同字母代表 0～9 中不同的数字，求出它们所代表的值.

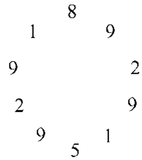
$$\frac{1}{\overline{AB}}=0.\dot{C}D\dot{B}.$$

8．将 $\frac{1997}{13}$ 化成小数后，是一个无限小数，从这个无限小数的小数点后第 1 位到 1997 位中，数字 3 共出现了多少次？

9．真分数 $\frac{a}{7}$ 化为小数后，如果从小数点后第一位的数字开始连续若干个数字之和是 1992，那么 a 是多少？

10．下图列出的 10 个数，按顺时针次序可组成许多个整数部分是一位的循

环小数，例如$1.8929\dot{1}592\dot{9}$．那么，在所有这样的数中，最大的一个是多少？



同步练习参考答案

1．（1）$0.\dot{2}8571\dot{4}$，小数点后第 100 位上的数字是 7.

（2）$0.\dot{3}0769\dot{2}$，小数点后第 100 位上的数字是 6.

（3）$0.3\dot{3}7\dot{8}$，小数点后第 100 位上的数字是 8.

2．由于$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$，每一个循环节中数字的和=1+4+2+8+5+7=27，100=16×6+4，所以小数点后 100 个数字的和是 27×16+1+4+2+8=447.

3．（1）$\frac{7}{24}=7\div 24=0.291\dot{6}$.

（2）$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}=2\div 9=0.\dot{2}$.

（3）$\frac{161}{120}=161\div 120=1.341\dot{6}$.

（4）$\frac{121}{440}=\frac{11}{40}=11\div 40=0.275$.

4．（1）$\frac{7}{9}$.　　（2）$\frac{9}{11}$.　　（3）$1\frac{8}{37}$.　　（4）$\frac{2569}{9900}$.

5．循环节分别为 7 和 5，[5,7]=35，在第 35 位时，两个循环小数首次都出现 6.

6．方法 1：$0.0\dot{1}+0.1\dot{2}+0.2\dot{3}+0.3\dot{4}+0.7\dot{8}+0.8\dot{9}$

$$=\frac{1}{90}+\frac{12-1}{90}+\frac{23-2}{90}+\frac{34-3}{90}+\frac{78-7}{90}+\frac{89-8}{90}$$

$$=\frac{1}{90}+\frac{11}{90}+\frac{21}{90}+\frac{31}{90}+\frac{71}{90}+\frac{81}{90}$$

$$=\frac{216}{90}$$

$=2.4$.

方法 2：$0.0\dot{1}+0.1\dot{2}+0.2\dot{3}+0.3\dot{4}+0.7\dot{8}+0.8\dot{9}$

$=0+0.1+0.2+0.3+0.7+0.8+(0.0\dot{1}+0.0\dot{2}+0.0\dot{3}+0.0\dot{4}+0.0\dot{8}+0.0\dot{9})$

$=2.1+0.0\dot{1}\times(1+2+3+4+8+9)$

$=2.1+\dfrac{1}{90}\times27$

$=2.1+0.3$

$=2.4$.

7．由已知得 $\dfrac{1}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{CDB}}{999}$，$999=\overline{AB}\times\overline{CDB}$，$B$ 是相同的字母，而 $27\times37=999$．所以结果有两个：

（1）$\dfrac{1}{27}=0.\dot{0}3\dot{7}$，　　（2）$\dfrac{1}{37}=0.\dot{0}2\dot{7}$．

8．$1997\div13=153.\dot{6}1538\dot{4}$，一个循环节是 6 个数字，其中 3 出现一次．$1997\div6=332\cdots\cdots5$，数字 3 共出现 $332+1=333$（次）．

9．$\dfrac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$，$\dfrac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4}$，$\dfrac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}$，$\dfrac{4}{7}=0.\dot{5}7142\dot{8}$，$\dfrac{5}{7}=0.\dot{7}1428\dot{5}$，$\dfrac{6}{7}=0.\dot{8}5714\dot{2}$．

因此，真分数 $\dfrac{a}{7}$ 化为小数后，从小数点第一位开始每连续 6 个数字之和都是 $1+4+2+8+5+7=27$，

又因为 $1992\div27=73\cdots\cdots21$，$27-21=6$，而 $6=2+4$，所以 $\dfrac{a}{7}=0.\dot{8}5714\dot{2}$，即 $a=6$．$\dfrac{a}{7}$ 的特殊性，循环节中数字不变，且顺序不变，只是开始循环的这个数有所变化．

10．要想这个数最大，整数部分必须选 9．它有 4 种：9.291892915，9.189291592，9.291592918，9.159291892．无论循环节怎样安排，都是从小数点后第十位开始重复．所以，以上 4 数中最大的是 9.291892915．再考虑循环节，可知答案是 $9.2918\dot{9}291\dot{5}$．

第 26 讲　分数的分拆

知识要点

我们把分子为 1，分母为自然数的分数叫单位分数．把一个分数分拆成两个或几个单位分数和的形式叫分数的分拆．

我们先看这样一个例子．$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\underbrace{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}}_{\text{通分}}=\underbrace{\frac{1+2}{6}=\frac{3}{6}}_{\text{合并}}=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{约分}}$，在进行分数加法时，总是先通分，然后合并，再约分．

反过来看 $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$，这就把 $\frac{1}{2}$ 写成两个单位分数和的形式，完成了分拆任务．

分拆可以有许多结果，例如，一个单位分数总可以这样拆：

$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$； $\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$， $\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$．

即 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}$．

我们可以把分数的分拆看做分数加法的逆运算，其过程应包括以下几部分：（1）扩分，（2）拆分，（3）约分．

例如拆分分数 $\frac{1}{a}$．

（1）扩分：分子和分母分别扩大（a+1）倍，变成 $\frac{(a+1)}{a\times(a+1)}$；

（2）拆分：将一个分数写成两个分数的和，

$\frac{(a+1)}{a\times(a+1)}=\frac{a}{a\times(a+1)}+\frac{1}{a\times(a+1)}$；

（3）约分：第一个分数将 a 约掉，就成了下面的结果：

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a\times(a+1)}.$$

如 $\frac{1}{3}=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3\times(3+1)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$.

经典题再现

把 $\frac{1}{15}$ 拆成两个单位分数的和.（**视频**）

（1）只要求写一种情况.　　（2）要求写出所有情况.

分析:（1）只写出一种情况，可以选用知识要点中我们给出的两个公式.（2）要写出所有的拆分，则要考虑将所有可能的扩分.因为约分时要将分子与 15 约分成 1，所以，拆分后的分子一定要是 15 的约数.一定要将 15 的所有约数找到.

解:（1）利用上面给出的公式 $\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a\times(a+1)}$，

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{15+1}+\frac{1}{15\times(15+1)}=\frac{1}{16}+\frac{1}{240}\quad 或\quad \frac{1}{15}=\frac{1}{30}+\frac{1}{30}.$$

（2）为了寻求所有可能的情况，我们就必须按拆分的三个步骤进行.

① 扩分.

15=3×5，15 的约数有 1,3,5,15．将这 4 个约数两两做和，得 1+3,1+5,1+15, 3+5,3+15,5+15 共 6 种情况，这也就是扩分的倍数.

② 分拆及约分.

$$\frac{1}{15}=\frac{1+3}{15\times(1+3)}=\frac{1}{15\times(1+3)}+\frac{3}{15\times(1+3)}=\frac{1}{60}+\frac{1}{20},$$

$$\frac{1}{15}=\frac{1+5}{15\times(1+5)}=\frac{1}{15\times(1+5)}+\frac{5}{15\times(1+5)}=\frac{1}{90}+\frac{1}{18},$$

$$\frac{1}{15}=\frac{1+15}{15\times(1+15)}=\frac{1}{15\times(1+15)}+\frac{15}{15\times(1+15)}=\frac{1}{240}+\frac{1}{16},$$

$$\frac{1}{15}=\frac{3+5}{15\times(3+5)}=\frac{3}{15\times(3+5)}+\frac{5}{15\times(3+5)}=\frac{1}{40}+\frac{1}{24},$$

$$\frac{1}{15}=\frac{3+15}{15\times(3+15)}=\frac{3}{15\times(3+15)}+\frac{15}{15\times(3+15)}=\frac{1}{90}+\frac{1}{18},$$

$$\frac{1}{15}=\frac{5+15}{15\times(5+15)}=\frac{5}{15\times(5+15)}+\frac{15}{15\times(5+15)}=\frac{1}{60}+\frac{1}{20},$$

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{30}+\frac{1}{30}.$$

去掉两种重复的，共 5 种不同的拆分法.

典型例题

【例 1】 把$\frac{4}{15}$拆成两个单位分数的和.（**视频**）

分析：前面我们拆分的是单位分数，$\frac{4}{15}$不是单位分数，约分时还要考虑约掉分子上的 4，所以扩分的倍数应是 4 的倍数．以保证最后约分时能约成单位分数.

① 扩分.

15=3×5，15 的约数有 1,3,5,15．将这 4 个约数两两做和，得 1+3，1+5，1+15，3+5，共 4 种不重复情况，由于分子是 4，因此只有 1+3，1+15，3+5 三种.

② 拆分及约分.

$$\frac{4}{15}=\frac{4\times(1+3)}{15\times(1+3)}=\frac{4\times1}{15\times(1+3)}+\frac{4\times3}{15\times(1+3)}=\frac{1}{15}+\frac{1}{5},$$

$$\frac{4}{15}=\frac{4\times(1+15)}{15\times(1+15)}=\frac{4\times1}{15\times(1+15)}+\frac{4\times15}{15\times(1+15)}=\frac{1}{60}+\frac{1}{4},$$

$$\frac{4}{15}=\frac{4\times(3+5)}{15\times(3+5)}=\frac{4\times3}{15\times(3+5)}+\frac{4\times5}{15\times(3+5)}=\frac{1}{10}+\frac{1}{6}.$$

注：本题是为了说明方法，以后如未特别指明只做一种即可．另外本题还可这样简单做：

$$\frac{4}{15}=\frac{1+3}{15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{5}.$$

这是一种简单可行的办法，以后做此类题时先观察能否直接分拆，如不行再用上述第一种办法.

【例 2】 已知$\frac{1}{18}+\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=1$，式中 A,B,C 为 3 个不同的自然数，那么 $A+B+C$ 等于多少？（**视频**）

解：由$\frac{1}{18}+\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=1$，可得$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$．那么解题的关键也就是把$\frac{17}{18}$写成 3 个单位分数的和．18 的约数有 1,2,3,6,9,18,从中取 3 个约数，使这 3 个数的和为 17 的倍数，通过观察只有 2+6+9=17.

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}=\frac{2+6+9}{18}=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2},$$

可得 $A+B+C=9+3+2=14$.

【例 3】 把$\frac{1}{14}$拆成两个单位分数的差（要求写出所有情况）.（**视频**）

分析：方法与分拆成单位分数和的方法相同，只是扩分的倍数是要找到分母的所有约数并求差.

解：① 扩分.

14=2×7，14 的约数有 1,2,7,14，两两做差可得四种不重复的情况：2−1，7−1，14−1，7−2.

② 分拆及约分.

$$\frac{1}{14}=\frac{2-1}{14\times(2-1)}=\frac{2}{14\times(2-1)}-\frac{1}{14\times(2-1)}=\frac{1}{7}-\frac{1}{14},$$

$$\frac{1}{14}=\frac{7-1}{14\times(7-1)}=\frac{7}{14\times(7-1)}-\frac{1}{14\times(7-1)}=\frac{1}{12}-\frac{1}{84},$$

$$\frac{1}{14}=\frac{14-1}{14\times(14-1)}=\frac{14}{14\times(14-1)}-\frac{1}{14\times(14-1)}=\frac{1}{13}-\frac{1}{182},$$

$$\frac{1}{14}=\frac{7-2}{14\times(7-2)}=\frac{7}{14\times(7-2)}-\frac{2}{14\times(7-1)}=\frac{1}{10}-\frac{1}{35},$$

共 4 种不同的方法.

【例 4】 如果$\frac{1}{1995}+\frac{1}{A}=\frac{1}{B}$，那么 B 最大是多少？（**视频**）

解：由已知得 $\frac{1}{1995}=\frac{1}{B}-\frac{1}{A}$，要求 B 最大，B 取 1995 总是不行的，比 1995 大更不行，最大可以为 1994．扩分 1994 倍；$1994=1995-1$．

$$\frac{1}{1995}=\frac{1995-1}{1995\times(1995-1)}=\frac{1}{1994}-\frac{1}{1995\times1994}.$$

答：B 最大可以取到 1994．

【例 5】 已知两个不同的单位分数之和是$\frac{1}{2004}$，且这两个单位分数的分母都是四位数，那么这两个单位分数的分母的差的最小值是多少？（**视频**）

解：在 2004 的约数中最接近的两个数是 3,4．

$$\frac{3}{2004\times(3+4)}+\frac{4}{2004\times(3+4)}=\frac{1}{4676}+\frac{1}{3507},$$

4676–3507=1169．

答：这两个单位分数的分母的差的最小值是 1169．

【例 6】 有一个等式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{17}{70}$．现在知道 a,b,c 是两两不相同的自然数，试求 a,b,c 的最大公约数．（**视频**）

解：$\frac{17}{70}=\frac{7+10}{70\times(7+10)}\times17=\left(\frac{10}{70\times17}+\frac{7}{70\times17}\right)\times17=\frac{1}{7}+\frac{1}{10}$

$$=\frac{1}{7}+\frac{2+5}{10\times(2+5)}=\frac{1}{7}+\frac{1}{35}+\frac{1}{14}.$$

$$\begin{cases}a=7\\b=35,\\c=14\end{cases}$$

7,35 和 14 的最大公约数是 7．

答：a,b,c 的最大公约数是 7．

难题精讲

在下面算式的两个括号中，各填入一个三位数，使等式成立.

$\frac{1}{1998}=\frac{1}{(\quad\quad)}-\frac{1}{(\quad\quad)}$.（视频）

解：$1998=2\times3^3\times37$，所以，1998 的所有约数是 1,2,3,6,9,18,27,37,54,74,111,222,333,666,999,1998，共 16 个.

在这些约数中，我们选出两个作差，例如选 3 和 2.

扩分 3−2=1（倍）.

$\frac{1}{1998}=\frac{3-2}{1998}=\frac{3}{1998}-\frac{2}{1998}=\frac{1}{666}-\frac{1}{999}$.

这即是一种填法.

要做出所有的填法，我们在选约数时，要保证约分后分母是三位数.

从 2,3,6,9,18,27,37,54,74 中选取两个互质的数：54,37 和 37,27 还可得到另外两个答案：

$\frac{1}{1998}=\frac{1}{629}-\frac{1}{918}=\frac{1}{540}-\frac{1}{740}$.

同步练习

1．把 $\frac{1}{10}$ 拆成两个单位分数的和，要求分母互不相等，共有几种不同的分拆？

2．已知 a 和 b 都是自然数，且 $\frac{1}{45}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，试求 a 和 b 的和.

3．将 $\frac{3}{7}$ 拆成 3 个单位分数之和，要求分母互不相等.（视频）

4．把 $\frac{1}{20}$ 拆成 6 个不同的单位分数之和.（视频）

5．和式$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$大于 1，应该去掉哪两个分数，余下的分数之和才能等于 1．

6．已知$\frac{11}{a}+\frac{11}{b}+\frac{11}{c}=\frac{143}{210}$（$a,b,c$ 互不相等），试给出 5 组符合要求的数．

7．如果将$\frac{1}{10}$表示成 3 个不同的分数单位的和，那么$\frac{1}{10}=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}$.

8．已知 A,B,C 是 3 个自然数，且$\frac{71}{385}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}$，试求 A,B,C 3 个数之和．

9．$\frac{1}{(\quad\quad)}+\frac{1}{(\quad\quad)}+\frac{1}{(\quad\quad)}=\frac{13}{24}$．要求 3 个加数的分母是连续的偶数．

10．4 个连续的自然数的倒数之和等于$\frac{19}{20}$，问这 4 个自然数两两乘积的和等于多少？

同步练习参考答案

1．① 扩分．

10=2×5，10 的约数有 1,2,5,10．将这 4 个约数两两作和，得 1+2，1+5，1+10，2+5，2+10，5+10 共 6 种情况，其中不重复的只有 4 种 1+2，1+5，1+10，2+5 ．

② 分拆及约分．

$$\frac{1}{10}=\frac{1+2}{10\times(1+2)}=\frac{1}{10\times(1+2)}+\frac{2}{10\times(1+2)}=\frac{1}{30}+\frac{1}{15},$$

$$\frac{1}{10}=\frac{1+5}{10\times(1+5)}=\frac{1}{10\times(1+5)}+\frac{5}{10\times(1+5)}=\frac{1}{60}+\frac{1}{12},$$

$$\frac{1}{10}=\frac{1+10}{10\times(1+10)}=\frac{1}{10\times(1+10)}+\frac{10}{10\times(1+10)}=\frac{1}{110}+\frac{1}{11},$$

$$\frac{1}{10}=\frac{2+5}{10\times(2+5)}=\frac{2}{10\times(2+5)}+\frac{5}{10\times(2+5)}=\frac{1}{35}+\frac{1}{14}.$$

即共有 4 种不同的分法．

2．多种答案，任给一组即可．我们下面给出 3 组：

① $\frac{1}{45}=\frac{9+5}{45\times(9+5)}=\frac{9}{45\times14}+\frac{5}{45\times14}=\frac{1}{70}+\frac{1}{126}$，

$\begin{cases}a=70\\b=126\end{cases}$，

$a+b=70+126=196$．

② $\frac{1}{45}=\frac{15+3}{45\times(15+3)}=\frac{15}{45\times(15+3)}+\frac{3}{45\times(15+3)}=\frac{1}{270}+\frac{1}{54}$，

$\begin{cases}a=270\\b=54\end{cases}$，

$a+b=270+54=324$．

③ $\frac{1}{45}=\frac{45+1}{45\times(45+1)}=\frac{45}{45\times(45+1)}+\frac{1}{45\times(45+1)}=\frac{1}{46}+\frac{1}{2070}$，

$\begin{cases}a=46\\b=2070\end{cases}$，

$a+b=2070+46=2116$．

3．$\frac{3}{7}-\frac{1}{4}=\frac{5}{28}$，$\frac{3}{7}=\frac{1}{4}+\frac{5}{28}$．

28 的约数有 1,2,4,7,14,28．

$\frac{5}{28}=\frac{1+4}{28}=\frac{1}{7}+\frac{1}{28}$，

$\frac{5}{28}=\frac{1}{3}\times\frac{1+14}{28}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{28}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{84}$，

故有 $\frac{3}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{84}$．

4．$20=2^2\times5$，20 的约数有 1,2,4,5,10,20 一共 6 个．我们将这 6 个约数全用上，可一次性拆成 6 个单位分数．

$1+2+4+5+10+20=42$．分子，分母扩分 42 倍，

$$\frac{1}{20}=\frac{1\times(1+2+4+5+10+20)}{20\times42}=\frac{1}{840}+\frac{2}{840}+\frac{4}{840}+\frac{5}{840}+\frac{10}{840}+\frac{20}{840},$$

约分以后得

$$\frac{1}{20}=\frac{1}{42}+\frac{1}{84}+\frac{1}{168}+\frac{1}{210}+\frac{1}{420}+\frac{1}{840}.$$

5．$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$，所以去掉$\frac{1}{8}$和$\frac{1}{10}$．

6．由$\frac{11}{a}+\frac{11}{b}+\frac{11}{c}=\frac{143}{210}$知，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{13}{210}$，而$\frac{13}{210}-\frac{1}{21}=\frac{3}{210}=\frac{1}{70}$，即$\frac{13}{210}=\frac{1}{21}+\frac{1}{70}$．再把$\frac{1}{70}$分拆成两个单位分数的和.

符合要求的五组数为(21,210,105)，(21,420,84)，(21,560,80)，(21,315,90)，(21,770,77).

7．$\frac{1}{10}=\frac{1+2+5}{10\times(1+2+5)}=\frac{1}{80}+\frac{2}{80}+\frac{5}{80}=\frac{1}{80}+\frac{1}{40}+\frac{1}{16}$.

8．$385=5\times7\times11$，385 的约数有 1,5,7,11,35,55,77,385.

而$5+11+55=71$.

所以有

$$\begin{aligned}\frac{71}{385}&=\frac{5+11+55}{385}\\&=\frac{5}{385}+\frac{11}{385}+\frac{55}{385}\\&=\frac{1}{77}+\frac{1}{35}+\frac{1}{7}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A+B+C&=7+35+77\\&=119.\end{aligned}$$

9．令$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+4}=\frac{13}{24}$（$a$为偶数）.

由$\frac{13}{24}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+4}<\frac{3}{a}$，得$a<5\frac{7}{13}$，

故 a=2 或 4，a=2 时，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}>\frac{13}{24}$，不合题意.

因此，$a=4$.

3 个偶数为 4,6,8．所得结果为 $\frac{1}{(4)}+\frac{1}{(6)}+\frac{1}{(8)}=\frac{13}{24}$.

10．$\frac{19}{20}=\frac{10}{20}+\frac{9}{20}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{4}{20}+\frac{5}{20}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ 这 4 个数为 3,4,5,6.

4 个数两两乘积的和=3×(4+5+6)+4×(5+6)+5×6=119.

第27讲 最优化

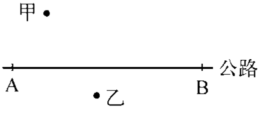
知识要点

我们做事情往往要追求最佳效果．例如买东西如何最省钱，开汽车如何最省油，做买卖如何利润最大．这些都是我们日常生活中常见的最优化问题．

实际情形往往有很多限制条件，本讲我们学习在这些限制条件下，用数学方法计算出最优值．

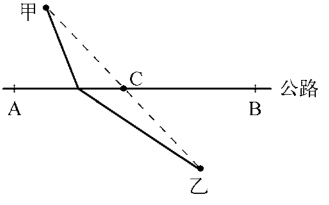
经典题再现

如下图所示，甲、乙两地在公路 AB 的两侧，在公路上找一点到甲、乙两地的距离和最小．（**视频**）



分析：两点间直线距离最短，折线的距离永远大于直线距离．

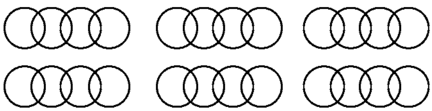
解：如下图所示，实线的距离永远大于虚线，所以，甲与乙的连线和公路的交于 C，则点 C 到甲、乙两地的距离之和最小．



典型例题

【例 1】 有 6 条铁链，每条有 4 个铁环．已知打开一个环要用 2 分钟，封闭一个打开的环要 3 分钟．现在要把这些铁链连成一条长铁链，至少要用多少时间？（**视频**）

解：把一个链的 4 个铁环全打开，要用 2×4 分钟，把其余的 5 个链全连上，要用 3×4=12（分钟）．共 20 分钟．



【例 2】 某合唱团 4 人必须在 17 分钟的时间内赶到演唱会场，途中必须经过一座桥，他们只有一只手电筒．一次同时最多可以有两人一起过桥，而过桥的时候必须持有手电筒，所以就得有人把手电筒带来带去．两人同行时以较慢者的速度为准．4 人过桥的时间分别是 1 分钟、2 分钟、5 分钟、10 分钟．他们如何过桥呢？（**视频**）

解：设 A、B、C、D 4 人过桥分别用 1 分钟、2 分钟、5 分钟、10 分钟．

A 和 B 先过用 2 分钟，A 返回用 1 分钟，

C 和 D 过用 10 分钟，B 返回用 2 分钟，

A 和 B 最后过用 2 分钟，所以共用 2+1+10+2+2=17（分钟）．

【例 3】 某种机床，重庆需要 8 台，武汉需要 6 台，正好北京有 10 台，上海有 4 台，每台机床的运费见下表，请问应该怎样调运，才能使总运费最省？（单位：元）（**视频**）

终点 / 起点	武 汉	重 庆
北 京	400	800
上 海	300	500

解：设北京运往武汉 x 台，则上海运往武汉 $6-x$ 台，北京运往重庆 $(10-x)$ 台，上海运往重庆 $4-(6-x)=(x-2)$ 台，显然应有 $2\leqslant x\leqslant 6$．

总运价为 $400x+800\times(10-x)+300\times(6-x)+500\times(x-2)=8800-200x$(元)．

故当 $x=6$ 时，运价最省，为 7600 元.

调运方案见下表：

	武汉	重庆
北京	6	4
上海	0	4

【例 4】 某人从住地外出有两种方案：一种是骑自行车去；另一种是乘公共汽车去.

显然公共汽车的速度比自行车的速度快，但乘公共汽车有一个等候时间（候车时间可看做是固定不变的）. 在任何情况下，他总是采用花时间最少的最佳方案. 下表表示他采用最佳方案到达 A、B、C 3 地所需要的时间. 为了到达离住地 8 千米的地方，他需要花多少分钟？并简述理由. **（视频）**

目的地	目的地离住地的距离	最佳方案所需的时间
A	2 千米	12 分钟
B	3 千米	15.5 分钟
C	4 千米	18 分钟

解：从 A、B 两地相差 1 千米，多用 3.5 分钟；而 B、C 两地相差 1 千米，只多用 2.5 分钟.

故他到较远处的 C 地是乘公共汽车，而到较近的 A 地是骑自行车.

显然去 B 地不是骑自行车，因为如果去 B 地采用骑自行车方案，那么需要的时间是$(12\div 2)\times 3=18$（分钟），而实际最佳方案只需 15.5 分钟. 故到 B 地去是乘公共汽车.

由 B、C 两地都是乘公共汽车，可知汽车 1 千米需 $18-15.5=2.5$（分钟），由此可求得候车时间是$18-2.5\times 4=8$（分钟）.

故到达离住地 8 千米的地方应用乘公共汽车的方案，需时 $8+2.5\times 8=28$（分钟）.

【例 5】 A、B 两人要到沙漠中探险，他们每天向沙漠深处走 20 千米，已知每人最多可以携带一个人 24 天的食物和水. 如果不准将部分食物存放于途中，其中一人最远可深入沙漠多少千米？（要求最后两人返回出发点）**（视频）**

分析：假如让 B 更远地深入沙漠，A 担任运输任务，关键是 A 何时返回．如果回去得早，A 留下自己返回所需食物，剩下不能全部转给 B，因为 B 只能带 24 天的食物．如果回去得晚，A 将消耗更多食物，转给 B 的更少，B 不能深入更远．

解：设 A 走 x 天后返回，A 留下自己返回所需的食物，剩下的转给 B，两人共消耗 $2x$ 天的食物，A 留下 x 天的食物返时回吃，此时 B 有 $24\times2-3x$（天）的食物．而 B 最多带 24 天的食物，则要 B 深入沙漠最远，应是 $24\times2-3x=24$．这样可求出 A 返回的时间，进一步可求出 B 最远深入沙漠的距离．

由 B 最多带 24 天的食物，$24\times2-3x=24$, $x=8$．即 A 走 8 天返回．

B 一共有 $24+8=32$ 天的食物，最远深入沙漠 16 天的路程．

$16\times20=320$（千米）．

答：一人最远可深入沙漠 320 千米．

【例 6】 一个 93 人的旅行团，其中男 46 人，女 47 人，他们住旅馆时，旅馆内有 11 人、7 人、4 人 3 种房间，男女分住不同的房间，至少需各种房间多少间？**（视频）**

解：不能有空床位．先考虑 11 人和 7 人的大房间，这样可使房间数少．

11 人间数	7 人间数	4 人间数	住人数
4	1	0	51
3	2	0	47
2	4	0	50
1	5	0	46

从上表看，男旅客采用第 4 条方案，女旅客采用第 2 条方案．

至少需要 11 人的 4 间，7 人的 7 间．

难题精讲

甲、乙两人进行下面的游戏：两人先约定一个自然数 N，然后由甲开始，轮流把 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这 10 个数字中的一个填入下图的某个方格中，每一方格只能填一个数字，但各方格所填的数字可以重复．当 6 个方格都填有数字后，就形成一个六位数．如果这个六位数能被 N 整除，那么乙获胜；如果

这个六位数不能被 N 整除，那么甲获胜．设 N 小于 15，问当 N 取哪几个数时．乙能取胜？（**视频**）

解：当 N 取 2,4,6,8,10,12,14 这 7 个偶数，甲将某个奇数放到最右边的方格中时，则这个六位数一定是奇数，奇数显然不能被偶数整除，所以此时乙无法取胜；

而当 N 取 5，甲在最右边的方格内填入一个非 0 非 5 的数字时，则这个六位数一定不能被 5 整除，所以此时乙无法获胜；此时还剩下 1,3,7,9,11,13 这 6 个数，显然当 N 取 1 时，乙一定获胜；

当 N 取 3 或 9 时，只要各个数位之和是 3 的倍数，或 9 的倍数．这时，只要乙保持两人所填数之和是 9 的倍数即可．

例如，甲填 0，乙填 9；甲填 1，乙填 8；甲填 2，乙填 7；⋯．

所以，这种情况乙一定胜．

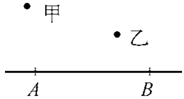
当 N 取 7 或 11 或 13 时，只要前三位数字和与后三位数字和的差对应是 7,11,13 的倍数，这个六位数就对应是 7,11,13 的倍数．

将 6 个数位分成前三位和后三位，当甲填前三位，乙就在后三位对应位置填；当甲填后三位，乙就在前三位对应位置填，并且填同样的数．这样可以确保前三位与后三位的差为 0．所以，乙一定胜．

于是，当 N 取 1,3,7,9,11,13 时，乙适当的操作能保证自己一定获胜．

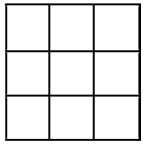
同步练习

1．如下图所示，甲、乙两点在直线 AB 的同侧，在直线 AB 上求一点，使它到甲、乙两点的距离和最小．



2．有一个 3×3 的方格纸，如下图所示．甲、乙两人轮流往方格里填写 1,3,4,5,6,7,8,9,10 这 9 个数字，最后甲的得分是上、下两行 6 个数的和，乙

的得分是左、右两列 6 个数的和，得分多的胜．请你为甲找出一种必胜的方法．



3．甲、乙两厂生产同一规格的上衣和裤子，甲厂每月用 16 天生产上衣，14 天生产裤子，共生产 448 套；乙厂每月用 12 天生产上衣，18 天生产裤子，共生产 720 套，现在两厂合并后，每月最多生产多少套衣服？

4．有一位探险家，用 6 天时间徒步横穿沙漠，如果一名搬运工人只能搬运一个人 4 天吃的粮食和水，那么这位探险家至少要雇几名搬运工？

5．A、B 两人从 A 开始，轮流在 1,2,3,…,1990 这 1990 个数中画去一个数，直到最后剩下两个数互质，那么 B 胜，否则 A 胜．问：谁能必胜？制胜的策略是什么？

6．少先队员植树，每人植树 2 棵．如果一个人挖一个树坑需要 25 分钟，运树苗一趟（最多可运 4 棵）需要 20 分钟，提一桶水（可浇 4 棵树）需要 10 分钟，栽好一棵树需要 10 分钟，现在以两个人为一个小组进行合作，那么，完成植树任务所需的最短时间是多少分钟？

7．若干箱同样的货物总重 19.5 吨，只知每箱重量不超过 353 千克．今有载重量为 1.5 吨的汽车，至少需要多少辆车，才能保证把这些货物一次全部运走？（箱子不能拆开）

8．某水池可以用甲、乙两水管注水，单放甲管需 12 小时注满，单放乙管需 24 小时注满．若要求 10 小时注满水池，并且甲、乙两管合放的时间尽可能少，则甲、乙两管全放最少需要多少小时？

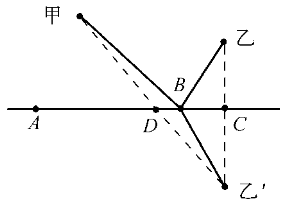
9．桌上放有 1992 根火柴．甲、乙两人轮流从中任取火柴，每次取的根数为 1 根或 2 根，规定取得最后一根火柴者胜．问：谁可获胜？

10．某工厂每天要生产甲、乙两种产品，按工艺规定，每件甲产品需分别在 A、B、C、D 4 台不同设备上加工 2,1,4,0 小时；每件乙产品需分别在 A、B、C、D 4 台不同设备上加工 2,2,0,4 小时．已知 A、B、C、D 4 台设备每天最多能转动的时间分别是 12,8,16,12 小时．生产一件甲产品该厂得利润

200 元，生产一件乙产品得利润 300 元．问：每天如何安排生产，才能得到最大利润？

同步练习参考答案

1．如下图所示，作乙关于 AB 的对称点乙′，连接甲、乙′ 交 AB 于 D，D 点就是所求的点．



这是因为 B、C、乙 3 点构成的三角形与 B、C、乙′ 构成的三角形完全重叠，所以，B 到乙的距离就是 B 到乙′ 的距离．

即甲到乙的距离等于甲到乙′ 的距离．

而两点间直线距离最短，所以，连接甲、乙′ 的直线，与 AB 交于 D 点，D 点即为要找的点．

2．因为四个角上的数甲、乙都有，问题在于填在 A、B、C、D 上的数．对甲来说 B、D 是乙的，所以在 B 或 D 处先填上 1．而在 A 或 C 处填上 9 或 10．

	A	
B		D
	C	

	9	
1		10
	7	

	2	
1		9
	10	

例如，图中给了 2 种填法．第一种填法：甲的得分比乙大 (9+7)−(1+10)=5．

第二种填法：甲的得分比乙多(2+10)−(1+9)=2．

无论怎样填，甲必胜．

3．首先确定两厂的特点，甲厂生产裤子速度快，

全月全生产裤子，共生产 448÷14×30=960（条）；

乙厂生产上衣快，全月生产上衣共生产 720÷12×30=1800（件）．

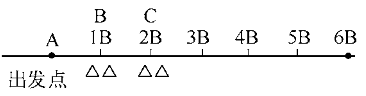
现在乙厂生产960件上衣与甲厂配套后，剩下的时间成套生产.

乙厂生产960件上衣用时$960\div60=16$（天）；

剩下14天生产$720\div30\times14=336$（套）.

两厂一共生产$960+336=1296$（套）.

4．如下图所示：



第一搬运工走一天将2天的生活用品放在B处就返回出发点.

第二搬运工到B处先加上1天的用品，到C处放下两天的用品返回到B处，拿好一天的用品返回出发点.

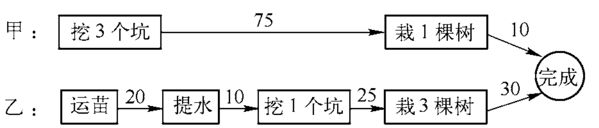
探险家到C处补足2天用去的生活用品就可安全到达终点.

所以，这位探险家至少要雇2名搬运工.

5．相邻两个自然数一定互质．将这1990个数按每两个数分为一组；（1,2）,（3,4）,（5,6）,…,（1989,1990）.

当A任意在括号中画去一个数时，B就在同一个括号中画去另一个数．这样B就一定能获胜.

6．可将甲、乙两人同时开始劳动的整个过程安排用图表示出来，如下图所示.



由图可知，完成任务所需的最短时间是85分钟.

7．关键是要理解“至少几辆车，才能保证一次运走”的含义．也就是说，在最大浪费车位的情况下，最少要几辆车.

因为，这堆货物箱数至少有

$19500\div353\approx55.2\approx56$（箱）.

一辆汽车每次最多能装的箱数为

$1500\div353\approx4.2\approx4$（箱）.

所以，一次全部运走所有货物，至少需要汽车$56\div4=14$（辆）.

8．乙管放水的速度是甲管的一半，即甲管 2 小时的任务，乙管要 4 小时完成．

由于甲、乙单独开放都不可能在 10 小时注满水池，因此必须有一定时间甲、乙同时开放．为了使它们合放的时间最少，应尽量开放甲管（速度快），这样甲开 10 小时未注满的由乙注满．乙注满需 4 小时，

因此甲、乙两管全放最少需要 4 小时．

9．因为两人轮流各取一次后，可以做到只取 3 根．谁要抢到第 1992 根，谁就必须抢到第 1989 根，进而抢到第 1986,1983,1980,⋯,6,3 根．

谁抢到第 3 根呢？自然是后取的人．即后取的人可以获胜．

后者获胜的策略是：当先取的人每取一次火柴时，他紧接着取一次，每次取的根数与先取的加起来的和等于 3．

10．设每天生产甲产品 a 件，乙产品 b 件．由于设备 A 的转动时间每天最多为 12 小时，则有（$2a+2b$）不超过 12．

又（$a+2b$）不超过 8，$4a$ 不超过 16，$4b$ 不超过 12．

由以上四个条件知，当 b 取 1 时，a 可取 1,2,3,4；

当 b 取 2 时，a 可取 1,2,3,4；

当 b 取 3 时，a 可取 1,2．

这样，就是在以上情况下，求利润 $200a+300b$ 的最大值．可列表如下：

b	1				2				3	
a	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
$200a+300b$	500	700	900	1100	800	1000	1200	1400	1100	1300

所以，每天安排生产 4 件甲产品，2 件乙产品时，能得到最大利润 1400 元．

第28讲　第二学期综合题选讲

知识要点

本讲综合运用学过的方法，解决一些综合题型.

经典题再现

今年，祖父的年龄是小明的年龄的 6 倍，几年后，祖父的年龄是小明年龄的 5 倍，又过几年后，祖父的年龄将是小明年龄的 4 倍，求祖父今年是多少岁？（**视频**）

解：设小明今年 x 岁，爷爷 $6x$ 岁；

设几年后，小明 y 岁，爷爷 $5y$ 岁；

设又过几年后，小明 z 岁，爷爷 $4z$ 岁.

利用年龄差不变，爷爷与小明的年龄差是 $5x=4y=3z$.

这个数即是 3 的倍数，又是 4 的倍数，又是 5 的倍数，因此，这个乘积可以是 60,120，等等.

按实际情况，他们相差 60 岁最为合理.

$x=60\div 5=12$.

所以，小明今年 12 岁，祖父今年 72 岁.

典型例题

【例 1】 在算式 $125\times\square\div 3\times 8-10=1990$ 中，□处应填入的数字是多少?（**视频**）

解：倒推法.

$125\times\square\div 3\times 8=1990+10$,

$125\times\square\div 3=(1990+10)\div 8$,

$125\times\square=(1990+10)\div 8\times 3$,

□=(1990+10)÷8×3÷125,

□=6

答：□处应填 6.

【例 2】 求乘法口诀表中 81 个积的平均数：（**视频**）

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

解：设第一行的和 $x=1+2+3+\cdots+9=45$,

那么第二行的和为 $2\times x$,

…

第九行的和为 $9\times x$,

所以总和为 $x+2x+3x+\cdots+9x=x(1+2+3+\cdots+9)=45\times45=2025$.

答：81 个积的平均数为 2025÷81=25.

【例 3】 一个住在深山中的猎人，他只有一只机械表戴在手上. 这天，表因忘了上发条而停了，附近又没有地方可以校对时间. 他决定下山到集市购买日用品，出门前他先上紧机械表的发条，并看了当时的时间是上午 6:35（时间已经是不准了），途中经过电信局，电信局的时钟是很准的，猎人看了钟并记下时间：上午 9:00. 到集市采购完，又沿原路经过电信局，看了当时电信局的时钟指向上午 10:00，回到家里，手上的表指向上午 10:35. 猎人如何调校出正确的时间呢？（**视频**）

解：猎人去集市从 6:35 到 10:35 共用 4 小时，还知道猎人从邮电局到集市再返回邮电局从 10:00 到 9:00 共用 1 小时，所以从邮电局返回家共用 (4−1)÷2=1.5（小时），即回到家的正确时间是 11:30. 说明他的表比正确时间晚 55 分钟，只要将他的表的时间加 55 分钟即可.

【例 4】 一台天平，要称出 1 克,2 克,…,13 克的东西，只要准备 3 个砝码就够了，这 3 个砝码应该各是多少克重的砝码？（**视频**）

1=1，

2=3−1，

3=3，

4=1+3，

5=9−3−1，

6=9−3，

7=9−3+1，

8=9−1，

9=9，

10=9+1，

11=9+3−1，

12=9+3，

13=9+3+1.

答：这 3 个砝码分别为 1 克、3 克和 9 克.

【例 5】 李师傅离家去上班时发现他家的钟停在了 12 点 10 分，他给钟上好了发条但没有把钟拨到正确的时间，李师傅到工厂时是 2 点 50 分，下班时是 11 点，他回到家时钟恰好指向 9 点. 已知李师傅从家去工厂与从工厂回到家所用的时间相同，那么他家的时钟慢了多少？（**视频**）

解：李师傅家的钟从 12 点 10 分走到 9 点，共走了 8 小时 50 分钟，由于他家的表上足了发条，所以，就是用准表测量，李师傅也是在外 8 小时 50 分钟.

他在工厂从 2 点 50 分到 11 点呆了共 8 小时 10 分钟，所以，他在路上花了 40 分钟，去时用了 20 分钟，从 2:50 倒退 20 分钟，应该是 2:30，所以，他家的表慢了 2 小时 20 分钟.

答：李师傅家的时钟慢了 2 小时 20 分钟.

【例 6】 少年宫游乐厅内悬挂着 200 个彩色灯泡，这些灯泡时明时暗，十分有趣. 这 200 个灯泡按 1～200 编号，它们的亮暗规则是：

第一秒，全部灯泡变亮；

第二秒，凡编号为 2 的倍数的灯泡由亮变暗；

第三秒，凡编号为 3 的倍数的灯泡改变原来的亮暗状态，即亮的变暗，暗的变亮；

…

第 n 秒凡编号为 n 的倍数的灯泡改变原来的亮暗状态.

这样继续下去，每 4 分钟一个周期. 问：第 200 秒时，明亮的灯泡有多少个？

解：灯泡最终是明或暗与开关被拉的次数的奇偶性有关. 最后明亮的灯泡开关应被拉过奇数次. 而开关被拉动的次数等于该灯泡编号数的约数的个数，因此约数个数为奇数个的编号，灯泡亮着.

我们知道，只有平方数有奇数个约数，因此，编号为完全平方数的灯泡符合题意.

某个灯泡，如果它的亮暗变化的次数是奇数，那么它是明亮的. 根据题意可知，号码为 K 的灯泡，亮暗变化的次数等于 K 的约数的个数，若 K 的约数的个数是奇数，则 K 一定是平方数. 所以 200 秒时，那些编号是平方数的灯泡是明亮的. 因为 200 以内有 14 个平方数，所以 200 秒时明亮的灯泡有 14 个.

答：第 200 秒时，明亮的灯炮有 14 个.

难题精讲

将数 $1\times2\times3\times4\times\cdots\times1997-5$ 分别除以 $2,3,\cdots,100$，那么所得的 99 个余数的和是多少？

解：注意 $1\times2\times3\times4\times\cdots\times1997$ 是 $2,3,\cdots,100$ 的倍数，只需将“-5”的部分重新处理，使这个数变成 2 的倍数+余数，3 的倍数+余数，$\cdots$，100 的倍数+余数形式即可.

$12\times3\times\cdots\times1997-5=1\times2\times3\times\cdots\times1997-3\times2+1$，　　除以 2 余 1

$1\times2\times3\times\cdots\times1997-5=1\times2\times3\times\cdots\times1997-2\times3+1$，　　除以 3 余 1

$1\times2\times3\times\cdots\times1997-5=1\times2\times3\times\cdots\times1997-2\times4+3$，　　除以 4 余 3

$1\times2\times3\times\cdots\times1997-5=1\times2\times3\times\cdots\times1997-5$，　　除以 5 余 0

$1\times2\times3\times\cdots\times1997-5=1\times2\times3\times\cdots\times1997-1\times6+1$，　　除以 6 余 1

$1\times2\times3\times\cdots\times1997-5=1\times2\times3\times\cdots\times1997-1\times7+2$，　　除以 7 余 2

…

$1\times2\times3\times\cdots\times1997-5=1\times2\times3\times\cdots\times1997-1\times100+95$　　除以 100 余 95，

余数和$=1+1+3+0+(1+2+3+\cdots+95)=4565$.

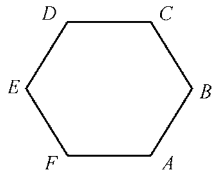
答：所得余数的和是 4565.

同步练习

1．160 人站在一行，自 1 起至 160 依次报数，凡报奇数者出队；留下的

再从 1 报起，报奇数的出队. 这样反复下去，最后留下一个人. 问这个人第一次报的数是多少？

2．设 $ABCDEF$ 为六边形，一只青蛙开始在顶点 A 处，它每次可以随意跳到相邻两顶点之一，若在 5 次内跳到 D 处，则停止跳动，问这只青蛙从开始到停止，可能出现的不同跳法有多少种？



3．地球上的火山座数是一个三位数，数字和为 14，十位数字比百位数字大 3. 如果将百位数字与个位数字对调，所得的新数比原数小 99，求火山座数.

4．一辆小轿车的车牌号是个五位数. 小波在玩倒立时，发现这辆车的车牌号倒着看还是个五位数，但是倒着看到的五位数比原来的五位数大了 78633. 这辆车的车牌号是多少?

5．某种商品的价格是：每个 1 元钱，每 5 个 4 元钱，每 9 个 7 元钱. 小赵的钱最多能买 50 个，小李的钱最多能买 500 个. 小李的钱比小赵的钱多多少元?

6.（1）要把 9 块完全相同的巧克力平均分给 4 个孩子（每块巧克力最多只能切成两部分），怎么分?

（2）如果把（1）中的“4 个孩子”改为“7 个孩子”，好不好分？如果好分，怎么分？如果不好分，为什么？

7．在 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{99},\frac{1}{100}$ 中选出若干个数，使它们的和大于 3，至少要选多少个数?

8．找出 8 个小于 80 的偶数，使它们的倒数之和等于 1.

9．黑板上写着数 9,11,13,15,17,19. 每一次可以擦去其中任何两个数，再写上这两个数的和减 1（例如，可以擦去 11 和 19，再写上 29）. 经过几次之后，黑板上就会仅剩下一个数. 试问，这个所剩下的数可能是多少？试找出所有可能的答案，并证明再无别的答案.

10．把若干个自然数 1,2,3,⋯乘到一起，如果已知这个乘积的最末 13 位

恰好都是零，那么最后出现的自然数最小应该是多少?

同步练习参考答案

1．最后留下的人在最后一轮必然报 2，在倒数第二轮必然报 4，在倒数第三轮必然报 8，…

倒推回去，2,4,8,16,32,64,128,256（已超），

所以，这个人第一次报的数是 128.

2．枚举法. 跳 5 次的方法有

A—B—A—B—C—D;

A—F—A—B—C—D;

A—B—C—B—C—D;

A—F—E—F—E—D;

A—F—A—F—E—D;

A—B—A—F—E—D.

跳 3 次的方法有

A—B—C—D;

A—F—E—D.

共 8 种.

3．百位数字只能是 1,2,3,4,5,6，相应的十位数字是 4,5,6,7,8,9（比百位数字大 3）. 由于数字和是 14，相应的个位数字是 9,7,5,3,1. 所以可能的答案只有 149,257,365,473,581. 其中只有后两个在百位数字与个位数字对调后，所得的新数比原数小，小 99 的又只有 473.

即火山座数为 473 座.

4．只有 0,1,6,8,9 五个数倒看有意义.

$$\begin{array}{r} \square\ \square\ \square\ \square\ \square \\ +\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square \\ \hline 7\ \ 8\ \ 6\ \ 3\ \ 3 \end{array}$$

89601−10968=78633.

原来车牌号是 10968.

5．由于 50=9×5+5，所以小赵的钱共有 7×5+4=39（元）.

由于 $500=9\times55+5$，所以小李的钱共有 $7\times55+4=389$（元）.

所以小李比小赵多 $389-39=350$（元）.

6.（1）把 9 块中的 3 块各分为两部分：

$1=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$，$1=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}$，$1=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$.

每个孩子得 $2\frac{1}{4}$ 块.

甲得 $1+1+\frac{1}{4}$，乙得 $1+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$，丙得 $1+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$，丁得 $1+1+\frac{1}{4}$.

（2）好分，每人分 $1\frac{2}{7}$ 块：

选 6 块切分，其余 3 块不动. 6 块分别切成

$\frac{2}{7}+\frac{5}{7}$，$\frac{2}{7}+\frac{5}{7}$，$\frac{3}{7}+\frac{4}{7}$，$\frac{3}{7}+\frac{4}{7}$，$\frac{1}{7}+\frac{6}{7}$，$\frac{6}{7}+\frac{1}{7}$，

甲：$1+\frac{2}{7}$；乙：$\frac{5}{7}+\frac{4}{7}$；丙：$\frac{3}{7}+\frac{6}{7}$；丁：$\frac{1}{7}+1+\frac{1}{7}$；戊：$\frac{6}{7}+\frac{3}{7}$；己：$\frac{4}{7}+\frac{5}{7}$；庚：$\frac{2}{7}+1$.

7．要使所选的数的个数尽可能小，就要尽量选用大数. 故只需按次取就可以了.

因 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}\approx2.928$，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{11}\approx3.01$，故至少要选 11 个数.

8．

$$1=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{8}.$$

所以这 8 个偶数是 2,6,8,12,20,30,42,56.

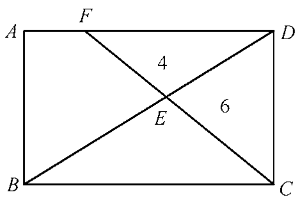
9．黑板上写着的六数之和为 84. 每次操作，黑板上的数就减少 1 个，而同时黑板上各数之和也减少 1. 故一共可操作 5 次，黑板上剩下的数为 $84-5=79$.

10．在 $1\times2\times\cdots\times55$ 中，5 的倍数有 $55\div5=11$（个），

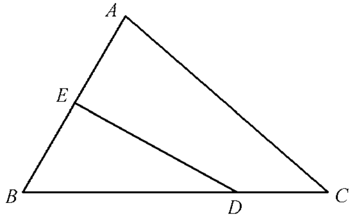
其中 25 的倍数有 $55\div25=2\cdots\cdots5$，共 2 个. 即在上式中，含质因数 5 的有 $11+2=13$（个）. 又上式中质因数 2 的个数多于 5 的个数. 从而它的末 13 位都是 0. 所以，最后一个乘数最小是 55.

第二学期综合练习题

1．如下图所示，BD,CF 将长方形 $ABCD$ 分成 4 块，其中两块面积是 4 平方厘米和 6 平方厘米．问四边形 $ABEF$ 的面积是多少？ **（视频）**



2．在三角形 ABC 中，$BD=2DC$，$AE=BE$，已知三角形 ABC 的面积是 18 平方厘米，问四边形 $AEDC$ 的面积等于多少？ **（视频）**



3．50 名学生面向老师站成一排，按老师口令从左至右顺序报数：1,2,3,…,50．报完后，老师让所报的数是 4 的倍数的同学向后转，接着又让所报的数是 6 的倍数的同学向后转．问现在仍然面向老师的有多少名学生？**（视频）**

4．现有梨 36 个，橘子 108 个，分给若干个小朋友，要求每人所得的梨数和橘子数相等，最多可分给多少个小朋友？每个小朋友得梨多少个？橘子多少个？

5．如果两数之和是 64，两数的积可以整除 4875，那么这两数之差是多少？**（视频）**

6．要使乘积 195×86×72×380×□的末五位都是 0，□中应填入的自然数最小值应是多少？（**视频**）

7．求[24871,3468].（**视频**）

8．约分 $\frac{6933}{25421}$.（**视频**）

9．学校运来 36 棵树苗，乐乐与欢欢两人争着去栽，乐乐先拿了若干树苗，欢欢看到乐乐拿得太多，就抢了 10 棵，乐乐不肯，又从欢欢那里抢回来 6 棵，这时乐乐拿的棵数是欢欢的 2 倍．问最初乐乐拿了多少棵树苗？

10．四位数 2□□□是 45 的倍数，符合这一要求的四位数共有多少个？

11．小明家养了 3 头牛，8 只羊，一天共吃草 93 千克；小亮家养了 5 头牛，6 只羊，一天共吃草 111 千克．一只羊，一头牛一天各吃多少千克草？（**视频**）

12．计算 $0.1\dot{6}+0.\dot{1}4285\dot{7}+0.125+0.\dot{1}$.（精确到小数点后第三位）（**视频**）

13． $0.1\dot{2}+0.2\dot{3}+0.3\dot{4}+0.4\dot{5}+0.5\dot{6}+0.6\dot{7}+0.7\dot{8}+0.8\dot{9}$.

14．12 头牛 28 天可以吃尽 0.1 公顷牧场上的全部牧草，21 头牛 63 天可以吃尽 0.3 公顷牧场上的全部牧草．问多少头牛 126 天可以吃尽 0.72 公顷牧场上的全部牧草（每公顷牧场上原有的草量相等，每公顷牧场上每天草生长量相同，每头牛每天的吃草量一样）？（**视频**）

15．一片草地，如果 9 头牛吃，12 天吃完所有的草；如果 8 头牛吃，16 天吃完所有的草；如果开始只有 4 头牛吃，从第 7 天起增加了若干头牛，再过 6 天吃完所有的草．问增加了多少头牛？（**视频**）

16．将下列二进制数化为十进制数：

（1）$(110111)_2$；　　（2）$(110000)_2$；　　（3）$(1000001)_2$.

17．将下列十进制数化为二进制数:

（1）$(8)_{10}$；　　（2）$(25)_{10}$；　　（3）$(261)_{10}$.

18．算式 1534×25=43214 是几进位制数的乘法?

19．甲每分钟走 75 米，乙每分钟走 80 米，丙每分钟走 100 米．甲、乙从东镇、丙从西镇同时出发相向而行，丙遇到乙后 3 分钟又遇到甲．求两镇之间相距多少米？（**视频**）

20．甲、乙、丙 3 人都要从 A 地到 B 地，甲和乙两人一起从 A 地出发，

2 小时后，丙才从 A 地出发，甲每小时走 5 千米，乙每小时走 4 千米，甲和乙两人出发后 12 小时，甲、丙同时到达 B 地，问丙出发后几小时追上乙？（**视频**）

21．长方体的 3 个侧面积分别为 3,6,8，那么长方形的体积是多少？

22．设△表示一个自然数，则算式 $\frac{1}{6}=\frac{1}{\triangle}-\frac{1}{\triangle+1}$ 中△所表示的自然数是几？

23．小明写出一个自然数的所有约数，并两两求和．这些和中最小的是 3，最大的是 1998．问这个自然数是多少？（**视频**）

24．3 个人自 A 地到 B 地，两地相距 36 千米，3 个人只有一辆自行车，这辆车只能坐两人，自行车的速度比步行速度快两倍．

他们 3 人决定：第一个人和第二个人同乘自行车，第三个人步行．3 个人同时出发，当骑车的两人到达 C 处时，骑车人放下第二个人，立即沿原路返回去接第三个人，到 D 处与第三个人相遇，然后两人同乘自行车前往 B；第二个人在 C 处下车后继续步行前往 B 地．结果 3 个人同时到达 B 地．那么，C 距 A 处多少千米？D 距 A 处多少千米？

25．某小学举行数学、语文、常识 3 科竞赛，学生中至少参加一科的：数学 203 人，语文 179 人，常识 165 人．参加两科的：数学、语文 143 人，数学、常识 116 人，语文、常识 97 人，3 科都参加的 89 人．问这个小学参加竞赛的总人数有多少人？

26．分别在混合循环小数 $3.57106\dot{4}$ 和 $1.67818\dot{9}$ 的小数点后面五位中的某一位上面添一个表示循环的圆点．使新产生的两个循环小数的差尽可能小．那么，新产生的两个循环小数分别是多少？

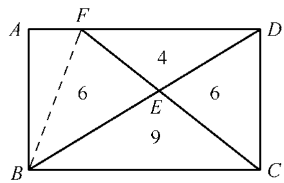
27．已知 $\overline{abcd}$ 是一个四位数，且 $\overline{abcd}-\overline{dcba}=\overline{\square 997}$，方格中应填几？

28．一块正方形的蛋糕，厚 4 厘米，正方形的边长是 15 厘米，它的上表面和侧面有薄薄的一层奶油，要分给 5 个小朋友，怎样切法，才能使 5 块蛋糕体积相等，奶油层的面积也相等？

29．个位数是 6，且能被 3 整除的四位数有多少个？

第二学期综合练习题参考答案

1．连接 BF，则三角形 BEF 的面积=三角形 CDE 的面积=6,



由于三角形 CDE 与三角形 DEF 的高相等，$6\div4=1.5$（厘米），则 $CE=1.5\times EF$.

三角形 BCE 与三角形 BEF 的高相同，CE 是 EF 的 1.5 倍，则三角形 BCE 的面积=1.5×三角形 BEF 的面积=6×1.5=9（平方厘米）.

三角形 BCF 的面积=6+9=15（平方厘米）.

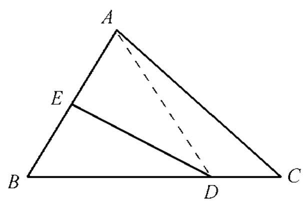
长方形 $ABCD$ 的面积 15×2=30（平方厘米）.

四边形 $ABEF$ 的面积=30−4−6−9=11（平方厘米）.

2．连接 AD，因为 $BD=2DC$，所以，三角形 ABD 的面积=2×三角形 ADC 的面积=2×18÷3=12（平方厘米）.

又 $AE=BE$，所以，三角形 ADE 的面积=三角形 BDE 的面积=12÷2=6（平方厘米）.

从而四边形 $AEDC$ 的面积=18−6=12（平方厘米）.



3．用枚举法．4 的倍数：4,8,12,16,20,24,⋯,48，共 12 个.

6 的倍数：6,12,18,24,⋯,48，共 8 个；

既是 4 的倍数又是 6 的倍数：12,24,36,48，共 4 个.

仍然面向老师的有既不是 4 的倍数，也不是 6 的倍数的人（没有转），既是 4 的倍数又是 6 的倍数的人（转了两次）.

共有 50−12−8+2×4=38（人）.

4．要把梨 36 个、橘子 108 个分给若干个小朋友，要求每人所得的梨数、橘子数相等，小朋友的人数一定是 36 的约数，又要是 108 的约数，即一

定是 36 和 108 的公约数．因为要求最多可分给多少个小朋友，可知小朋友的人数是 36 和 108 的最大公约数．36 和 108 的最大公约数是 36，也就是可分给 36 个小朋友．

每个小朋友可分得梨 $36\div36=1$（只），

每个小朋友可分得橘子 $108\div36=3$（只）．

所以，最多可分给 36 个小朋友，每个小朋友可分得梨 1 只，橘子 3 只．

5．$4875=3\times5\times5\times5\times13=(39\times25)\times5$．

$39+25=64$，故两数分别为 25 和 39，两数差是 $39-25=14$．

6．$195\times86\times72\times380=5\times39\times2\times43\times2\times2\times9\times2\times2\times5\times19$

$$=3\times3\times19\times3\times13\times43\times2^6\times5^2.$$

末位 5 个 0，还缺 3 个 5．即□中应填 $5^3=125$．

7．先用辗转相除法求 24871,3468 的最大公约数．

$(24871,3468)=(3468,595)=(595,493)=(493,102)=(102,85)=(85,17)=17$．

再用短除法求最小公倍数：

$$\begin{array}{r|ll} 17 & 24871 & 3468 \\ \hline & 1463 & 204 \end{array}$$

所以，$[24871,3468]=17\times1463\times204=5073684$．

8．用辗转相除法：

$(25421,6933)=(6933,4622)=(4622,2311)=2311$．

所以，用 2311 约分：$\dfrac{6933\div2311}{25421\div2311}=\dfrac{3}{11}$．

9．最后乐乐的棵数是欢欢的 2 倍．总数为 36 棵，所以，最后状态可求出：

欢欢 $36\div(1+2)=12$（棵）；　乐乐 $12\times2=24$（棵）；

倒推 2 次：第一次倒推，乐乐 $24-6=18$（棵）；欢欢 $12+6=18$（棵），

　　　　　第二次倒推，乐乐 $18+10=28$（棵）；欢欢 $18-10=8$（棵）．

所以，最初乐乐拿了 28 棵．

10．$45=5\times9$，且 5 与 9 互质，所以，2□□□是 5 的倍数，也是 9 的倍数．

因为 2□□□是 5 的倍数，所以，个位数是 0 或 5．

当个位数为 0 时，由 2□□0 是 9 的倍数，得出中间的两个数字之和为 7

或 16．

前一种情况有 8 种：0+7=1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1=7+0；

后一种情况有 3 种：7+9=8+8=9+7；

共 11 种．

当个位数为 5 时，由 2□□5 是 9 的倍数，得出中间两个数字之和为 2 或 11．

前一种情况有 3 种：0+2=1+1=2+0；后一种情况有 8 种：2+9=3+8=4+7=5+6=6+5=7+4=8+3=9+2，共 11 种．

总结以上所讲，一共有 11+11=22 个符合条件的数．

11．一只羊每天吃草量

(93×5−111×3) ÷ (8×5−6×3)

=(465−333) ÷ (40−18)

=132 ÷ 22

=6（千克）．

一头牛每天吃草量

(93−8×6) ÷ 3

=(93−48) ÷ 3

=45 ÷ 3

=15（千克）．

所以，一只羊每天吃草 6 千克，一头牛每天吃草 15 千克．

12． $0.1\dot{6}=\frac{16-1}{90}=\frac{1}{6}$， $0.\dot{1}4285\dot{7}=\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7}$， $0.125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$， $0.\dot{1}=\frac{1}{9}$．

原式$=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=\frac{84+72+63+56}{504}=\frac{275}{504}\approx 0.546$．

13． $0.1\dot{2}=\frac{11}{90}$， $0.2\dot{3}=\frac{21}{90}$， $0.3\dot{4}=\frac{31}{90}$， $0.4\dot{5}=\frac{41}{90}$， $0.5\dot{6}=\frac{51}{90}$， $0.6\dot{7}=\frac{61}{90}$， $0.7\dot{8}=\frac{71}{90}$， $0.8\dot{9}=\frac{81}{90}$．

原式$=\dfrac{11+21+31+41+51+61+71+81}{90}=\dfrac{368}{90}=4\dfrac{4}{45}$.

14．21 头牛 63 天吃尽 0.3 公顷草可以转化为 7 头牛 63 天吃尽 0.1 公顷上的草．这样可以和 12 头牛 28 天吃尽 0.1 公顷上的草对比求 0.1 公顷上的草的生长速度．

0.1 公顷上草的生长速度为$(7\times63-12\times28)\div35=3$（份/天），

0.72 公顷上草的生长速度 $7.2\times3=21.6$（份/天）．

0.1 公顷上原有草量为 $12\times28-3\times28=252$（份），

0.72 公顷上草的生长速度为 $7.2\times252=1814.4$（份/天）．

设 x 头牛 126 天可以吃尽 0.72 公顷上的全部草．

$126x=1814.4+21.6\times126$,

解得 $x=36$.

即 36 头牛 126 天吃尽 0.72 公顷上的草．

15．设一头牛一天吃草一份．

草的生长速度为$(8\times16-9\times12)\div4=20\div4=5$（份/天），

原有草量 $8\times16-5\times16=48$（份），

设增加 x 头牛，则有

$4\times6+(4+x)\times6=48+5\times12$.

解得　$x=10$.

即从第 7 天起增加 10 头牛．

16．（1）$(110111)_2=(1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2+1)_{10}=(55)_{10}$；

（2）$(110000)_2=(1\times2^5+1\times2^4)_{10}=(48)_{10}$；

（3）$(1000001)_2=(1\times2^6+1)_{10}=(65)_{10}$；

17．（1）$(8)_{10}=(2^3)_{10}=(1000)_2$；

（2）$(25)_{10}=(11001)_2$.

（3）$(261)_{10}=(100000101)_2$；

18．因为原式中有数字 5，所以至少要 6 进制．

而在十进制中有 $1534\times25=38350<43214$，所以该进制小于十进制．

再由尾数确定，$4\times5=20$．十进制尾数为 0．

6 进制：$6\times3+2$，进 3，尾数为 2．不对．

7 进制：$7\times2+6$，进 2，尾数为 6，也不对．

8 进制：8×2+4，进 2，尾数为 4．符合．

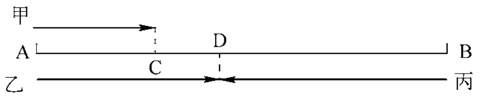
9 进制：9×2+2，进 2，尾数为 2．不对．

所以，原式为 8 进制．

19．C 距 D 这段距离甲、丙合走 3 分钟，共(75+100) ×3=525（米），

乙、丙相遇时间为 525÷ (80−75)=105（分钟），

A、B 两地间距离为(80+100) ×105=18900（米）．



20．丙追甲距离为 2×5=10（千米），

追及时间为 12−2=10（小时）．

速度差为 10÷10=1，

丙速为 5+1=6（千米/小时）．

丙追乙追及距离为 2×4=8（千米），

速度差为 6−4=2，

追及时间为 8÷2=4（小时）．

即丙出发后 4 小时追上乙．

21．设长方体的长、宽、高分别为 a,b,c．则 3 个侧面面积分别为：

$a\times b=3$，$b\times c=6$，$a\times c=8$．

三式相乘得 $a\times b\times b\times c\times a\times c=3\times 6\times 8=144$．

即$(a\times b\times c)^2=12^2$，即 $a\times b\times c=12$．

长方体的体积为 12．

22．$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}$．即△表示的自然数是 2．

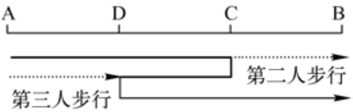
23．由于 3 是两个约数的和，所以这两个约数是 1 和 2，设这个自然数为 x，那么它的最大的两个约数是 x 和 $x\div 2$，

即 $x+x\div 2=1998$，

$x=1332$．

24．如下图所示，第一、二两人乘车的路程 A 至 C，应该与第一、三两人骑车的路程 D 至 B 相等，否则三人不能同时到达 B 点．同理，A 至 D 与 C

至 B 的路程相等.



当第一人骑车在 D 处与第三人相遇时，骑车人走的路程为 $AD+2CD$，第三人步行路程为 AD. 因自行车速度比步行速度快 2 倍，即自行车速度是步行的 3 倍，故 $AD+2CD=3CD$，从而 $AD=CD=BC$.

因 $AB=36$ 千米，故 $AD=CD=BC=12$ 千米，故 C 距 A 24 千米，D 距 A 12 千米.

25．由容斥原理知，这个小学参加竞赛的人数为(203+179+165)−(143+116+97)+89=280（人）.

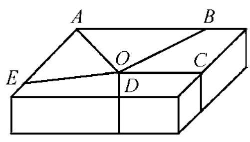
26．$3.571\dot{0}6\dot{4}$，$1.678\dot{1}8\dot{9}$.

要使差尽可能小，被减数应尽可能小，而减数应尽可能大. 故被减数表示循环的圆点要加在 0 上，而减数表示循环的圆点应加在 8 上，该数中有两位是 8，故选放在 9 前的 8 上.

27．$\overline{abcd}-\overline{dcba}=(1000a+100b+10c+d)-(1000d+100c+10b+a)=999a+90b-90c-999d=9\times(111a+10b-10c-111d)$ 是 9 的倍数.

故□997 能被 9 整除，□应填入 2.

28．如下图所示，A,B,C,D,E 5 点将正方形的周长 5 等分. O 是正方形的中心，沿 OA,OB,OC,OD,OE 竖直切下就能使表面上奶油层的面积相等，每块体积也相等了.



29．被 3 整除的数的特征是各个数位的数字和是 3 的倍数.

个位是 6，已经是 3 的倍数，前三位数字和也要是 3 的倍数，即前三位组成的数也是 3 的倍数.

三位数中，即 100 至 999 中，每 3 个数有一个 3 的倍数，共 $900\div3=300$（个）.

反侵权盗版声明

电子工业出版社依法对本作品享有专有出版权。任何未经权利人书面许可，复制、销售或通过信息网络传播本作品的行为；歪曲、篡改、剽窃本作品的行为，均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人应承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。

为了维护市场秩序，保护权利人的合法权益，我社将依法查处和打击侵权盗版的单位和个人。欢迎社会各界人士积极举报侵权盗版行为，本社将奖励举报有功人员，并保证举报人的信息不被泄露。

举报电话：（010）88254396；（010）88258888
传　　真：（010）88254397
E-mail：dbqq@phei.com.cn
通信地址：北京市万寿路 173 信箱
　　　　　电子工业出版社总编办公室
邮　　编：100036